Живое мышление

с помощью

геометрии

Предисловие

Наша цель заключается не в том, что мы намереваемся писать учебник по геометрии, а скорее в том, что мы показываем следующее: геометрия не служит в первую очередь цели преподавания знаний в этой области, а пробуждению и упражнению развивающихся у каждого ученика интеллектуальных способностей. Мы попытались опираться на педагогику Рудольфа Штейнера, и мы очень обязаны авторам, упомянутым в списке литературы в самом конце учебника.

Что касается трудности предлагаемых предметов, мы ничего не классифицировали, так как учитель сам лучше всего знает, какие примеры ученикам по силе, и какие – нет. С одной стороны, ученик не должен сталкиваться со слишком серьёзными трудностями, так как тогда у него будет «каша в голове». Геометрия должна служить развитию ясного ума. С другой стороны, нам нельзя недооценивать способности ученика. Удивительным является тот факт, что уже относительно молодые ученики умеют без трудности решать геометрические проблемы, если преподавание геометрии приспосабливается к возрасту и уровню зрелости ученика и к его кругозору. Абстрактные понятия не служат этой педагогической цели. Нельзя начинать с абстрактных определений точки или прямой линии и т.д. Нам надо заниматься геометрией за долгое время до того, когда мы по-настоящему начинаем её преподавать. Она уже с первого класса играет важную роль, поскольку мы уже с первого класса рисуем элементарные геометрические фигуры, которые в течение второго и третьего классов превращаются в более сложные фигуры.

До пятого и шестого классов преподавание геометрии должно сосредотачиваться на рисовании фигур. Только с того момента, как рисование геометрических фигур становится неотъемлемой частью мышления ребенка, мы переходим к использованию геометрических инструментов. Геометрия служит улучшению способности видеть и самостоятельно улучшать. Вряд ли есть другой предмет, который лучше геометрии служит цели упражнения самостоятельного мышления. Рисование в рамках геометрии развивает также сознание о реальном мире. Наблюдая формы ископаемых богатств, растений, животных, человеческого тела, а также движения небесных тел, мы констатируем закономерности геометрии. Таким образом, у ученика стимулируется также творческая сила, развивается гибкость его мышления, и ученик получает от этого глубокое удовлетворение. В этом заключается, пожалуй, самая важная задача геометрии: ученик узнаёт, что он с помощью творческой силы в состоянии понимать закономерности геометрии. [Не в

последнюю очередь по этой причине геометрия пользовалась большой репутацией в Древней Греции во время античности.]

Геометрия служит развитию всё более и более самостоятельного мышления. В настоящее время преобладает мышление, направленное на экономические цели и соображения. Мышление должно быть свободным, независимым от экономических задач, оно должно служить общим целям воспитания человека. Необходимо, чтобы Вы обращали внимание именно на эту функцию геометрии.

Заниматься геометрией, не прибегая к инструментам (линейке, циркулю и т.д.)

Как обычно, мы просто смотрим на геометрические фигуры, а не чувствуем их. Однако надо учитывать, что, исходя из рисования фигур, представление об этих фигурах укрепляется, и геометрическое мышление развивается. Именно поэтому нам надо, начиная с первого класса, уделять чрезвычайно большое внимание рисованию и «ощущению» элементарных форм. В рамках антропософской педагогики придумали рисование форм в самых младших классах, которое превращается в симметричное и динамическое рисование в классах постарше. «Прежде, чем рисовать предмет реальной жизни, надо ощущать его форму» (Рудольф Штейнер). И художник Кандинский подтверждает это высказывание: «Форма сама по себе, какая бы абстрактная она ни была, обладает внутренним звуком, она представляет собой духовное существо с определёнными характеристиками». Ученики должны будут ощущать это существо. Выполнение этой задачи преподавания геометрии удаётся только в том случае, если мы на первом этапе не прибегаем к инструментам, которые обычно используются в рамках преподавания геометрии. Рисуя геометрические формы от руки, мы помогаем ученику лучше ознакомиться с этими формами. Только, если мы идём этим путём, ученик узнаёт закономерности этих фигур и по-настоящему их знает. Его знание укрепляется тем, что он «чувствует, ощущает» эти формы, то есть его знание не представляет собой чисто умственное поверхностное знание.

Круг

Начнём с круга. Круг – символ целостности и представляет собой основную геометрическую фигуру. Нельзя его понимать только как плоскость или контур.

Когда ученик пробует рисовать круг, он чувствует в себе невидимый центр круга.

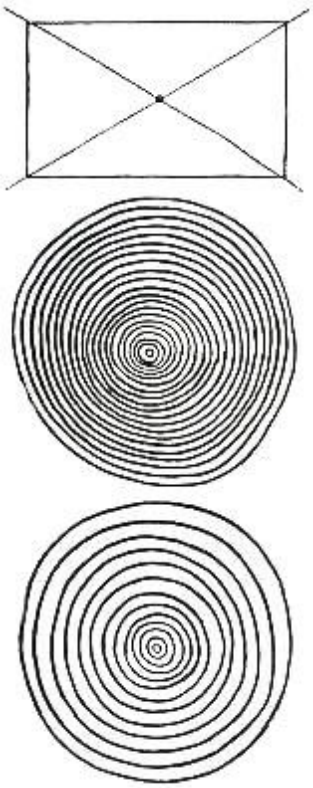
Если рисовать круг, надо обращать внимание на то, чтобы свободное движение руки становилось всё более и более регулярным, так что мы получаем всё более и более совершенные круги. После того, как мы достаточно часто рисовали круг, мы в состоянии делить круг сначала на регулярные треугольники и четырёхугольники, потом на нерегулярные многообразные треугольники и четырёхугольники. Таким образом, ученик узнаёт, что регулярность или нерегулярность возникающих при делении плоскостей зависит от того, как мы делим круг. Чем более нерегулярно будет деление круга, тем более нерегулярными становятся плоскости. Таким образом, мы проходим различные четырёхугольники вплоть до многоугольника. После того, как ученик исследует геометрические фигуры, которые становятся всё более и более нерегулярными, он испытывает удовольствие и удовлетворение от того факта, что, в конце концов, исходя из многоугольника, возвращается к регулярному кругу (задание 41).

Задания для учеников.

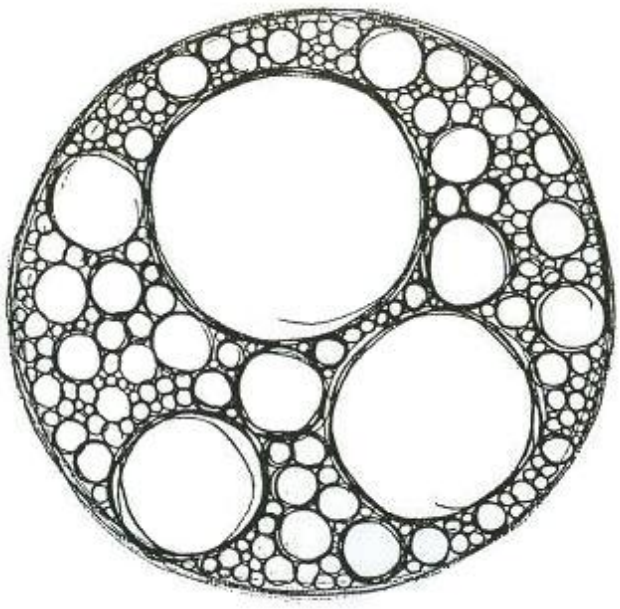
Задание 1: найдите на глазок середину бумаги и поставьте туда точку. Как можно проверить, находится ли эта точка действительно прямо в середине бумаги?

Задание 2: нарисуйте вокруг этой точки маленький круг и дальнейшие круги, становящиеся всё более и более большими.

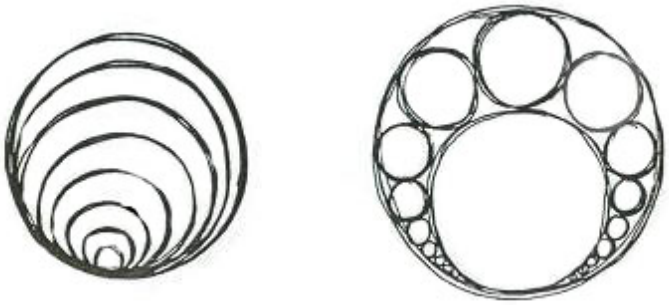
Задание 3: как задание 2, только наоборот.



Задание 4: нарисуйте большой круг и заполните его кругами разного размера так, чтобы эти круги соприкасались друг с другом, а не пересекались.



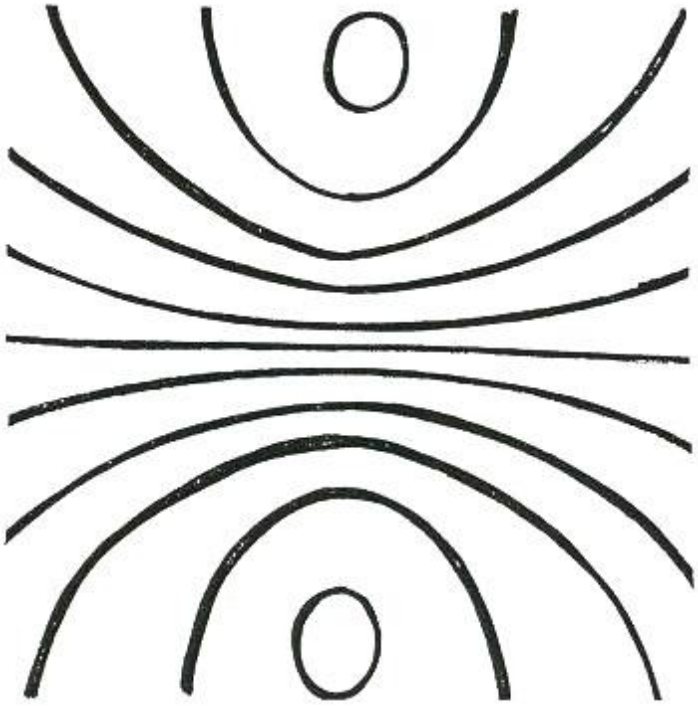
Поскольку круг часто встречается как элементарная форма в природе и в искусстве во многих вариантах, мы стимулируем ученика самому найти варианты круга. Примеры из книги «Круг», написанной Гергардом Галлвицером.



Прямая линия

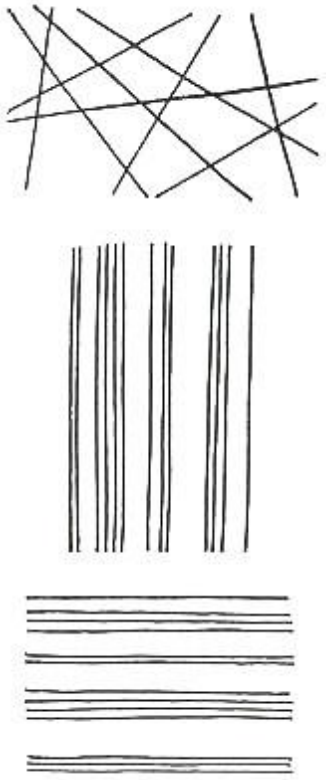
Если Вы хотите познакомить ученика с главными характеристиками прямой линии, мы рекомендуем Вам снова исходить из круга. Как видно в нижеуказанном рисунке, мы «открываем» круг. Дуги, которые получаются в ходе этого процесса, становятся всё более и более плоскими, так что мы, в конце концов, получаем горизонтальную прямую линию. Исходя из этой прямой линии, мы продолжаем этот процесс изменения формы и возвращаемся к кругу. Если ученик самостоятельно работает, он будет лучше всего понимать то, что Генрих Федерер имел в виду, когда написал: «Когда

математики изобрели прямую линию, они были очень близки к бесконечности, и когда математики изобрели круг, они были очень близки к Богу. Они, пожалуй, были ближе к Богу, чем поэзия и музыка в их самых удачных моментах.



Всё больше и больше открывающиеся дуги превращаются в прямую линию именно в тот момент, когда невозможно увеличивать открытость в обе стороны. Прямая линия, следовательно, представляет собой или чрезвычайно открытую дугу или круг, середина которого находится в бесконечности. Этот вывод получается только благодаря собственному мышлению. Будучи взрослым, ученик будет в состоянии понимать, насколько мышление даёт ему возможность представлять себе факты, которые недостижимы путём собственных наблюдений. Очень важная задача преподавания геометрии заключается в том, чтобы ученик понял следующее: если он не может делать логические выводы с помощью собственного наблюдения, то он сможет сделать это с помощью собственного мышления, которое служит этой цели. Собственное наблюдение ученика ему поможет констатировать, что круг и прямая линия представляют собой экстремальные противоположности. Мы хотим указать на эту противоположность, характеризуя не только круг, но и прямую линию.

Прямолинейное течение прямой линии символизирует особое стремление к ясности и недвусмысленности. Круг ориентируется к своему центру, в то время, как прямая линия одномерна. Если рисовать прямую линию, от ученика требуется особая сосредоточенность и внутренний подъём.



Если рисовать несколько прямых линий в горизонтальном или в вертикальном направлении, свойства прямой линии становятся ещё более впечатляющим. Именно прямая линия в вертикальном направлении должна, по идее, впечатлять ученика, поскольку он должен быть в состоянии ощущать, что он в какой-то степени избавляется от силы тяжести.

Прямая линия в горизонтальном направлении склонена к земле, и, следовательно, ощущается учеником как противоположность прямой линии в вертикальном направлении. Ученикам интересно сталкиваться с этими двумя направлениями в природе и ощущать, что, например, развитие растений осуществляется в рамках этих двух направлений.

Взаимное проникновение горизонтальной линии и её перпендикуляра представляет собой главную характеристику креста, который целыми веками является символом особенно большой сдержанности. Это взаимное проникновение горизонтальной линии и её перпендикуляра влечёт за собой прямой угол, который соединяет вертикаль и горизонталь, два главных направления.

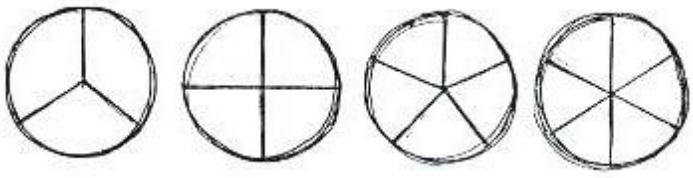
Прямой угол обладает ключевым значением в области геометрических закономерностей. Он представляет собой ровно одну четверть оборота. Его определили в 90 градусов.

Задание 5: нарисуйте круг, начертите горизонтальную и вертикальную оси. Какие углы возникают? Сколько углов получается?

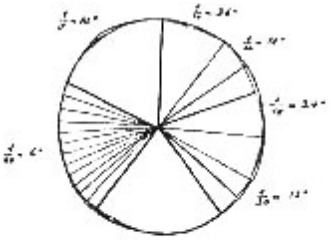
Где встречаются прямые углы у человека? Если человек стоит, то его ноги и пол, на котором он стоит, образуют прямой угол. Наше направление взгляда также образует прямой угол по отношению к нашим ногам. И, прежде всего, прямой угол представляет собой главный ориентир в области архитектуры. Мы возбуждаем в ученике интерес к окружающему миру вне перпендикуляра и горизонтальной линии.

Задание 6: нарисуйте углы, являющиеся больше или меньше прямого угла (нарисуйте тупые и острые углы).

Задание 7: разделите круг на три, четыре, пять, шесть, девять частей. Сколько градусов у одного сектора? Определите количество градусов в каждом отдельном вышеупомянутом случае.



Задание 8: нарисуйте круг и сектора, составляющие одну пятую (=1/5), одну десятую (=1/10), одну пятнадцатую (=1/15), одну двадцатую (=1/20), одну тридцатую (=1/30) и одну шестидесятую (=1/60) поверхности круга. Определите количество градусов в каждом отдельном случае.

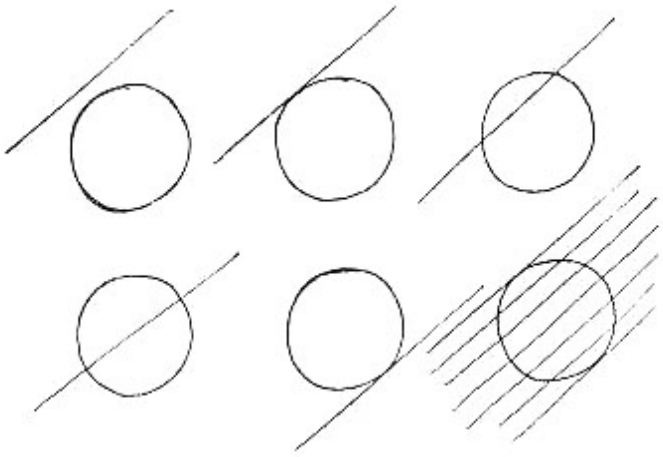


Задание 9: нарисуйте циферблат и определите углы между маленькими и большими стрелками, если сейчас: один час, два часа, три часа, четыре часа, пять часов, шесть часов.

Противопоставление круга и прямой линии

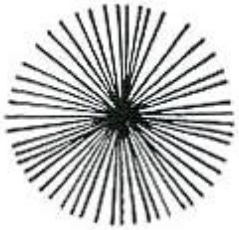
Если приближать прямую линию к кругу, мы констатируем, что они соприкасаются друг с другом лишь в одной точке или в двух точках. Эта очень ограниченная возможность соприкосновения круга с прямой линией указывает на совершенно замкнутое единство круга. Прямая линия, соприкасающаяся с кругом лишь в одной точке, называется **касательной**. Если прямая линия пересекает точку соприкосновения, то есть, если существуют две точки соприкосновения, мы будем называть эту прямую линию **секущей**. Отрезок такой прямой линии внутри круга называют **хордой**. Самая длинная хорда совпадает с диаметром круга.

Если принимать во внимание, что прямая линия может быть окружена как открытый до бесконечности круг, то мы можем себе представить следующее в нижеуказанном рисунке бесконечно большой круг приближается к кругу ограниченного размера, перешагиваем и покидаем его. Такое представление служит расширению наших ощущений, которое свойственно именно ученику на пороге периода духовного и полового созревания.



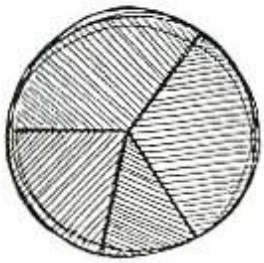
Задание 10: нарисуйте круг и любое количество прямых линий от центра круга до его края (радиусы).

Задание 11: нарисуйте, исходя из одной точки, прямые линии одной и той же длины во все стороны. Чем ближе они находятся друг к другу, тем более очевидно, что они представляют собой поверхности круга.



Задание 12: нарисуйте круг и любое количество диаметров (линий, режущих пополам круг).

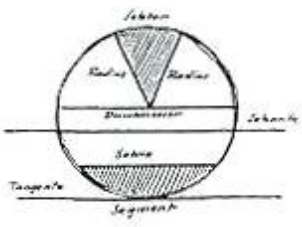
Задание 13: нарисуйте круг и любое количество секторов разных размеров, закрасьте их разными цветами.



Задание 14: разделите круг хордой так, чтобы получились сегменты неодинакового размера, и закрасьте их двумя разными цветами.

Задание 15: нарисуйте круг и более короткие и более длинные хорды, не пересекающиеся друг с другом. Закрасьте сегменты между хордой и дугами.

Задание 16: нарисуйте круг, один радиус, один диаметр, одну хорду, одну секущую, одну касательную, один сектор и один сегмент, и напишите подходящие термины. (Ученик сам должен решать, как он рисует вышеупомянутые элементы).

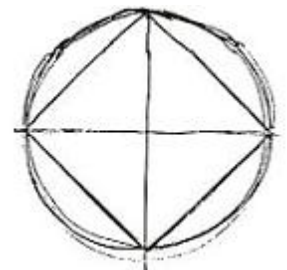


Мы с Вами затронули круг. Мы будем переходить сначала к регулярным делениям круга, потом к нерегулярным делениям круга, и будем знакомиться с многообразными формами четырёхугольников и треугольников.

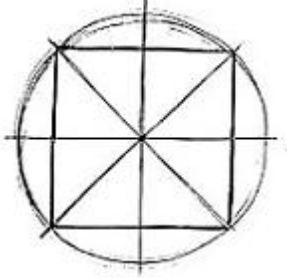
Квадрат

Мы рекомендуем Вам развивать квадрат, как самый регулярный четырёхугольник, исходя из круга. Если мы воспринимаем круг как что-то парящее, связанное со сферой, с небесным пространством, мы можем себе представить следующее: на ученика, скорее всего, производит большое впечатление, если мы заставляем его проникнуть в форму круга за счёт вертикальной и горизонтальной осей, найдя при этом более земную форму квадрата. Тот факт, что квадрат – более земная форма, подчёркивает наличие в нём прямых линий и прямых углов. Однако особое свойство квадрата состоит также в его чрезвычайно большой регулярности. Эта регулярность показывается в равенстве сторон, углов и диагоналей. Не только стороны, но и диагонали квадрата образуют также форму креста.

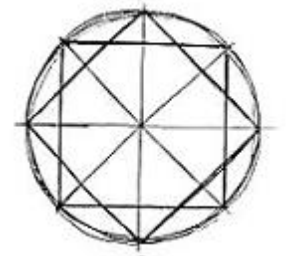
Задание 17: нарисуйте круг и горизонтальную и вертикальную оси. Получается крест. Соедините четыре точки пересечения на крае круга одну за другой. Опишите поверхность, которую мы получили (квадрат) и диагонали внутри этого квадрата.



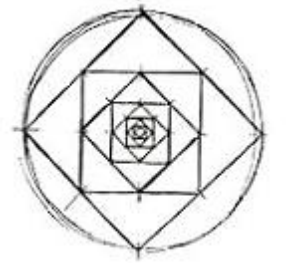
Задание 18: что надо делать, чтобы квадрат, полученный в задании 17, стоял на одной стороне?



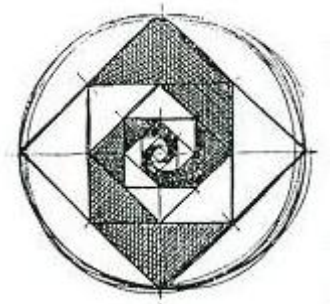
Задание 19: задания 17 и 18 в одном и том же рисунке.



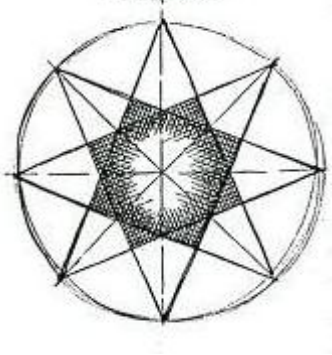
Задание 20: нарисуйте круг в квадрате, как в задании 17, только без креста осей. Разделите четыре стороны квадрата пополам, и соедините эти точки одну за другой. Продолжите так, чтобы возникли новые квадраты, становящиеся всё более и более маленькими. Сколько раз можно продолжить именно так? Какие наблюдения можно делать, сравнивая поверхности этих квадратов?



Задание 21: нарисуйте фигуру задания 20 и закрасьте противоположные один к другому треугольники так, чтобы получить указанную рядом спираль.



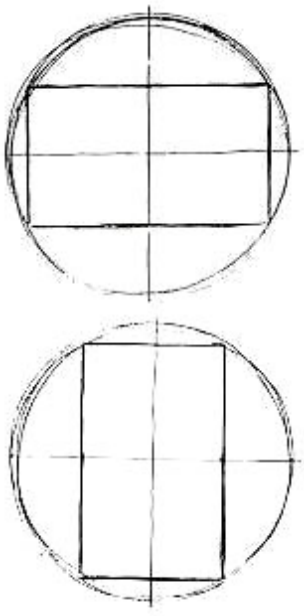
Задание 22: нарисуйте круг и крест осей, потом нарисуйте обе биссектрисы. Соедините восемь точек пересечения на крае круга, каждый раз при этом перескакивая через две из них. Пронаблюдайте и назовите возникающие при этом поверхности. Найдёте ли Вы внутри два квадрата, частично перекрывающие друг друга? Проверьте точность этих квадратов.



Прямоугольник

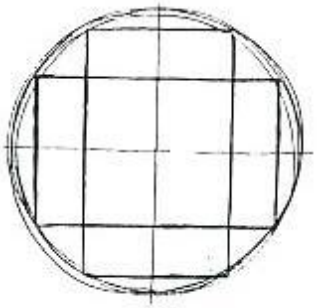
В то время, как у квадрата вертикальное и горизонтальное направления взаимно уравновешиваются, у прямоугольника эти два направления находятся в определённом состоянии напряжённости друг к другу. В зависимости от формы прямоугольника преобладает или сила поднимания и стремления наверх, или сила расширения и внимания. Соотношение этих двух противоположных сил определяет действие, исходящее из прямоугольника. Это воздействие ощущается и в области архитектуры и живописи.

Задание 23: нарисуйте круг и горизонтальные прямые линии, идущие параллельно горизонтальной оси и на равном расстоянии по сравнению с центром круга и с его самой высокой и самой глубокой точками. Соедините окончательные пункты этих двух линий (прямоугольник).

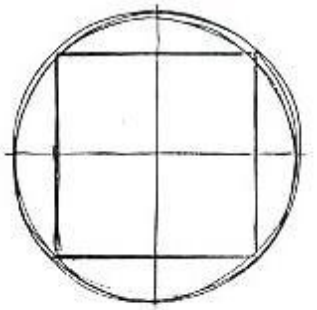


Задание 24: повторите задание 23, н нарисуйте хорды параллельно вертикальной оси.

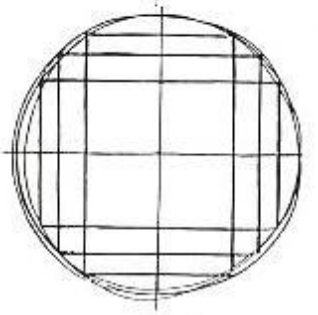
Задание 25: задания 23 и 24 в одном и том же рисунке.



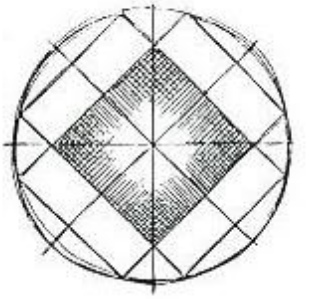
Задание 26: выберите расстояние хорд так, что вместо прямоугольника получается квадрат.



Задание 27: задания 23, 24 и 26 в одном и том же рисунке.



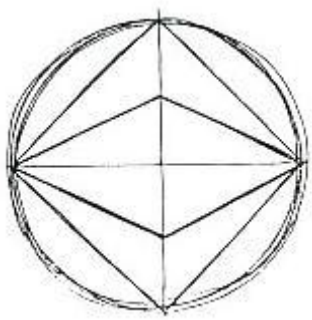
Задание 28: нарисуйте два прямоугольника в задании 25 так, чтобы квадрат в середине стоял на одном углу (сравни задания 17 и 18).



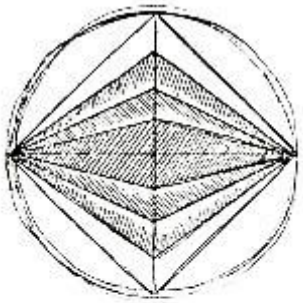
Ромб и похожие на ромб фигуры

Ромб и ромбоид возникают тогда, когда квадраты и прямоугольники теряют свои главные свойства - наличие прямых углов. Стороны и параллельность противоположных сторон сохраняются. Однако стороны становятся «косыми» и существуют острые и тупые углы.

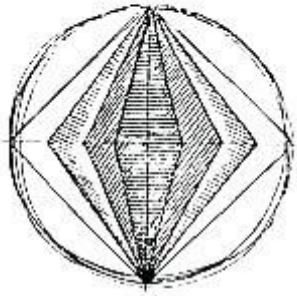
Задание 29: нарисуйте круг и крест осей, нарисуйте квадрат, стоящий на одном углу. Разделите пополам верхнюю и нижнюю половины вертикальной оси и соедините эти две точки с двумя окончательными точками горизонтальной оси на крае круга. Опишите возникший при этом четырёхугольник.



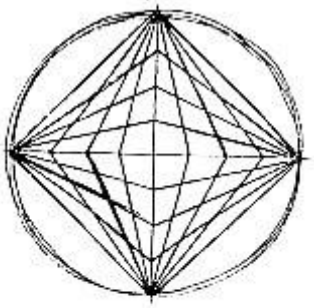
Задание 30: нарисуйте круг и квадрат, стоящий на одном углу. Углы ромбов двигаются вдоль вертикальной оси на равном расстоянии друг от друга. Надо выделить разными цветами возникающие четырёхугольники.



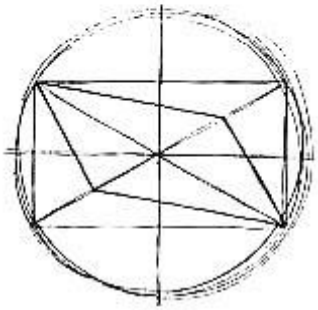
Задание 31: как задание 30, только вдоль горизонтальной оси.



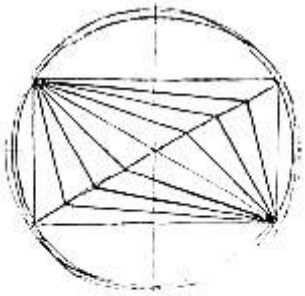
Задание 32: задания 30 и 31 в одном и том же рисунке.



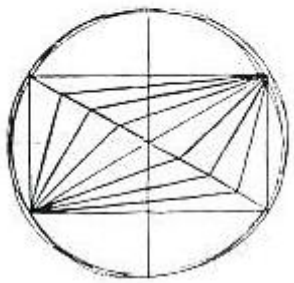
Задание 33: нарисуйте прямоугольник как в задании 23. Нарисуйте диагонали, разделите пополам обе половины одной из двух диагоналей и соедините эти точки деления с противоположными окончательными точками на углах прямоугольника. Опишите возникающий четырёхугольник.



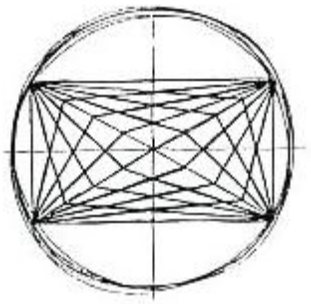
Задание 34: нарисуйте прямоугольник, как в предыдущем задании. Углы внизу слева и наверху справа двигаются вдоль диагонали на равном расстоянии друг от друга, то есть углы приближаются друг к другу. Надо выделить (закрасить) разными цветами возникающие ромбы.



Задание 35: как задание 34, но выберите углы внизу справа и наверху слева.



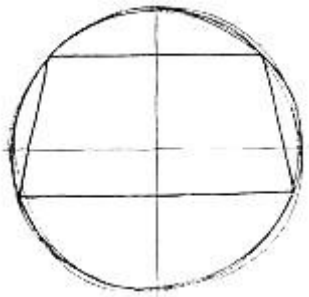
Задание 36: задания 34 и 35 в одном и том же рисунке.



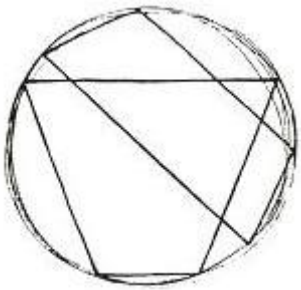
Трапеция и похожие на трапецию фигуры

Переходя к трапеции и похожим на неё фигурам, исходя из ромба, пронаблюдайте дальнейшую потерю регулярности. Трапецию можно ощущать как поверхность, находящаяся между квадратом или прямоугольником с одной стороны и треугольником с другой. Трапеция в своей самой элементарной форме не обладает ни одинаковыми сторонами, ни одинаковыми углами, ни одинаковыми диагоналями, и даже параллельности одной из двух пар сторон не существует. Если отказаться от параллельности второй пары сторон, мы получаем похожую на трапецию фигуру, представляющую собой самую высокую степень нерегулярности.

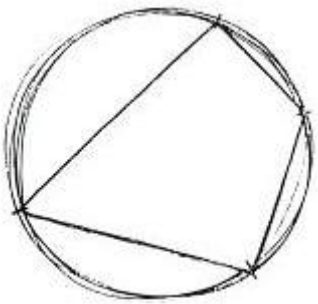
Задание 37: нарисуйте две хорды разного размера, идущие параллельно либо горизонтальной, либо к вертикальной оси, и соедините их окончательные точки на крае круга. Нарисуйте такие же разные трапеции (равнобедренные трапеции).



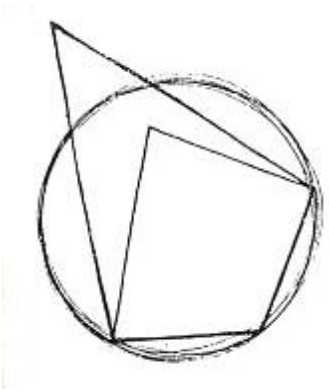
Задание 38: нарисуйте круг и равнобедренные трапеции в любом положении. Нарисуйте трапеции, которые больше похожи на треугольник, и трапеции, более похожие на прямоугольник.



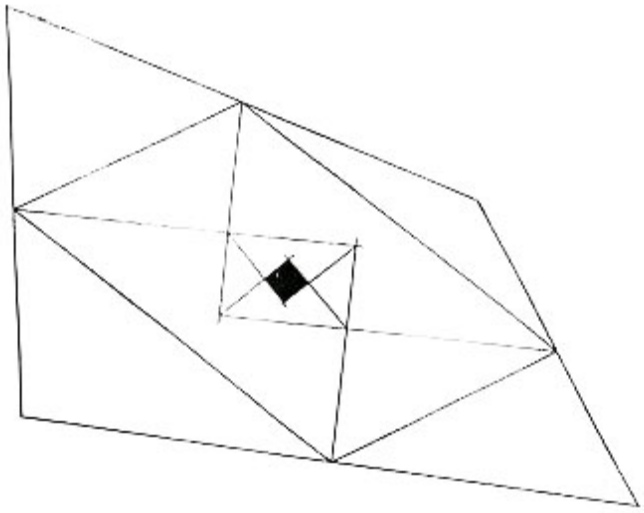
Задание 39: разделите окружность на четыре неодинаковых расстояния (четыре точки) и соедините эти точки. Вы получите особую форму фигуры, которая похожа на трапецию (четырёхугольник, стороны которого состоят из хорд).



Задание 40: нарисуйте две фигуры, которые похожи на трапецию, где один угол находится вне линии круга (окружности) – это будет первая фигура – и фигуру, один угол которой находится внутри линии круга – это будет вторая фигура. Мы констатируем следующее: нерегулярность фигур, которые похожи на трапецию, увеличивается.



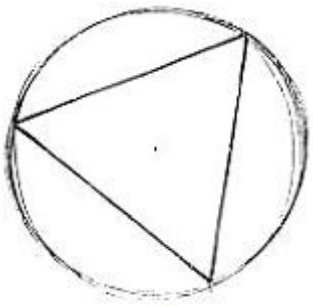
Задание 41: как можно возвращаться путём делений пополам сторон и углов к регулярному четырёхугольнику? (В рамках этого задания требуется употребление линейки и циркуля. Ученик сумеет его решить только после того, как ознакомится с основными методами геометрической конструкции).



Треугольник

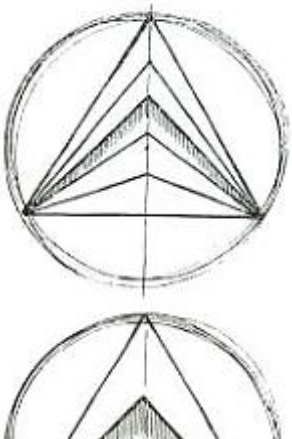
Равносторонний треугольник был символом святой троицы во время раннего христианства. Треугольник, в первую очередь равнобедренный, находится, как нам кажется, если наблюдать его форму, по своей форме между кругом и четырёхугольником. Его основание склонно к земле, но в то же время его стороны стремятся вверх до той точки, в которой стороны сходятся или пересекаются. Чем круче его стороны, тем больше ощущался треугольник как стремление наверх (как, например, в готическом стиле архитектуры). Чем его стороны более плоские, тем больше ощущалась его форма как форма, которая более склонна к земле (примером сказанного может служить фронтон древнегреческого храма).

Задание 42: разделите окружность на три одинаковых расстояния тремя точками, и соедините эти точки. Опишите и назовите площадь, которая находится внутри трёх хорд (равносторонний треугольник).



Задание 43: нарисуйте задание 42 так, чтобы одна сторона равностороннего треугольника представляла собой горизонтальную хорду круга. Вершина треугольника в самом начале совпадает с краем круга. Если вершина треугольника всё больше и больше удаляется от основания, то есть от горизонтальной хорды круга, мы получаем всё более и более высокие треугольники (равнобедренные треугольники).

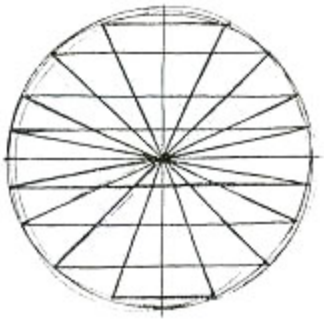
Задание 44: то же самое, что и в задании 43, только наоборот: вершина треугольника всё больше и больше приближается к основанию, то есть к горизонтальной хорде круга. В конце концов, треугольник совпадает с основанием, то есть с горизонтальной хордой круга. Обратите особое внимание на переход от острых к тупым углам. (При этом переходе наблюдается наличие прямого угла).



Задание 45: нарисуйте круг, равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник, которые Вы нашли при решении предыдущего задания.

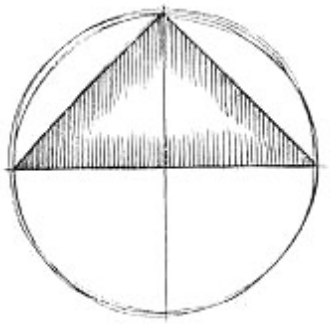
В отличие от заданий 43 и 44, в которых вершина двигается и равносторонний треугольник превращается в треугольники с острыми и тупыми углами, превращение треугольников в заданиях 46, 47 и 48 осуществляется следующим образом: основание, то есть горизонтальная хорда, поднимается и опускается.

Задание 49: можно изменить и выполнить задание 48 и следующим образом: в нижней половине круга мы рисуем сначала острые равнобедренные треугольники, потом треугольники, основание которых становится всё шире и шире. В конце концов, эти треугольники «исчезают» в горизонтальную ось. Они появляются в верхней половине, только в перевёрнутом порядке. Они становятся всё уже и уже, и, в конце концов, «исчезают» в вертикальную ось.



Это задание нам показывает следующее: треугольники также находятся между горизонтальной и вертикальной осями, и, в зависимости от их формы, или одно, или другое направление преобладает. Гармоническая уравновешенность наблюдается только в случае равностороннего треугольника.

Задание 50: где именно внутри круга был расположен прямоугольный равнобедренный треугольник задания 48? Нарисуйте и опишите этот треугольник.



Если смотреть на нижеуказанные рисунки, бросится в глаза следующий факт: от одной геометрической фигуры до другой число «нерегулярностей» увеличивается.

У квадрата с описанной вокруг него окружностью и вписанной в него окружностью все четыре стороны и все четыре внутренних угла одинаковы. Его две диагонали одинаковой длины.

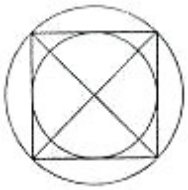


Рисунок 1 – квадрат с вписанной в него и описанной вокруг него окружностями.

У прямоугольника же только две стороны из четырёх – одинаковой длины. Две стороны одинаковой длины противоположны друг другу. Равенство всех четырёх углов сохраняется. Диагонали по-прежнему одинаковой длины.

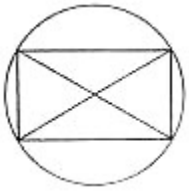


Рисунок 2 – Прямоугольник и описывающая его окружность.

У ромба равенство по длине с четырёх сторон сохраняется, но только по два угла из четырёх одинакового размера, и две диагонали неодинаковой длины. Два угла одинакового размера противоположны друг другу. Однако две диагонали перпендикулярны друг другу.

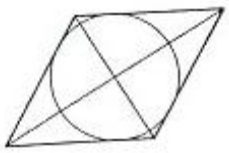


Рисунок 3 – ромб и вписанная в него окружность.

Если у прямоугольника ограничивать равенство всех четырёх углов до равенства двух пар углов, возможны два варианта: углы, одинаковые по размеру, могут быть смежными друг с другом или противоположными. Таким образом, мы получаем равнобедренную трапецию (рисунок 4) или параллелограмм (рисунок 5).

Рисунок 4 – Равнобедренная трапеция и описанная вокруг него окружность.

Если у ромба ограничивать равенство по длине всех четырёх сторон до равенства двух пар сторон, возможны два варианта:

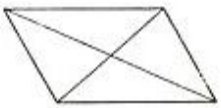


Рисунок 5 – Параллелограмм

Две стороны одинаковой длины исходят из одного и того же угла, или эти две стороны противоположны друг другу. Таким образом, мы получаем фигуру, показанную на рисунке 6, или параллелограмм - на рисунке 5.

Рисунок 6

Вышеуказанный обзор четырёхугольников наглядно показывает следующее высказывание: **регулярности уменьшаются от одного рисунка к другому, соответственно, нерегулярности увеличиваются.** Мы отличаем три разные степени регулярности друг от друга:

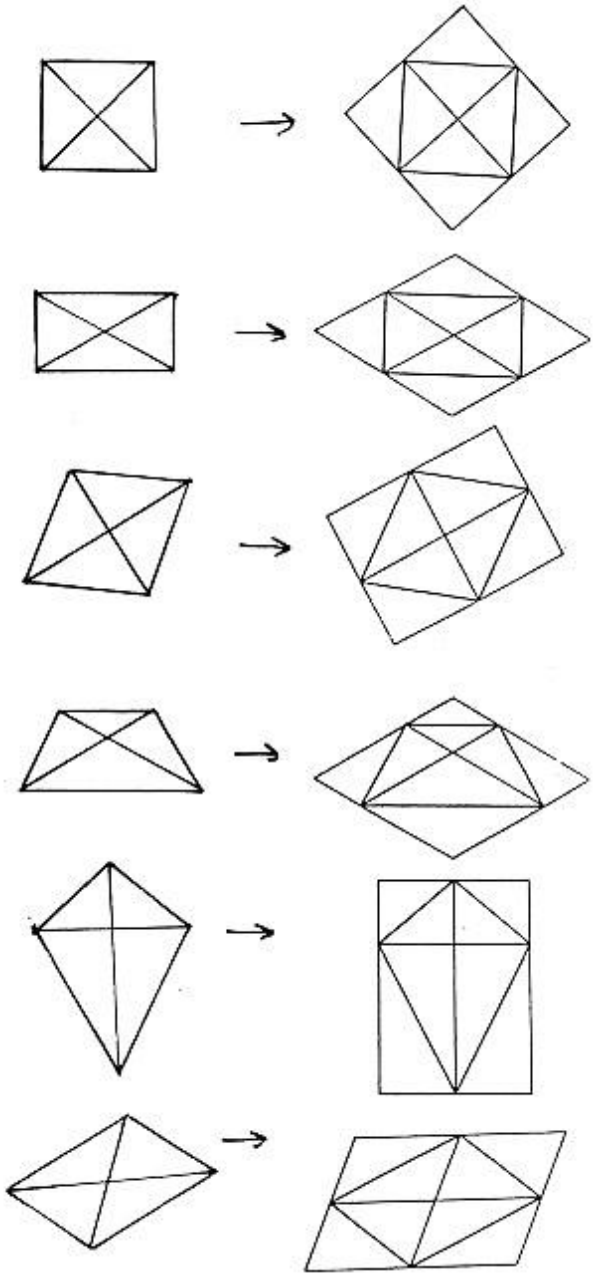
первая степень – рисунок 1 (квадрат с вписанной в него окружностью и описанной вокруг него окружностью)

вторая степень – рисунок 2 (прямоугольник и описанная вокруг него окружность) и рисунок 3 (ромб и вписанная в него окружность).

третья степень – рисунок 4 (равнобедренная трапеция и описанная вокруг него окружность), рисунок 5 (параллелограмм) и рисунок 6.

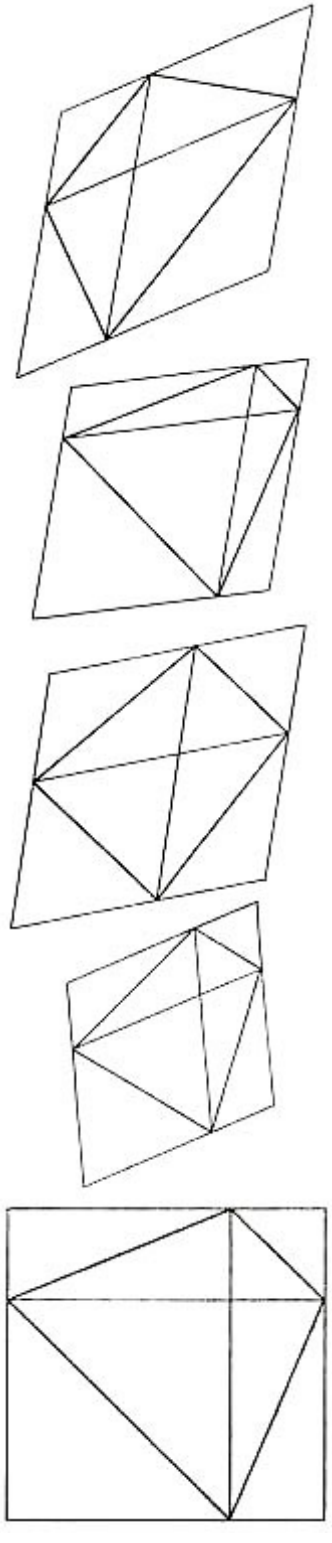
Упражнение 1: Посмотрите внимательно на вышеуказанное изображение различных четырёхугольников и попытайтесь найти «общие свойства», существующие между квадратом и остальными четырёхугольниками. Например: и у квадрата, и у трапеции есть описанная окружность и диагонали, имеющие одинаковую длину. И у фигуры на рисунке 6, и у квадрата есть вписанная окружность и перпендикулярные друг к другу диагонали.

Упражнение 2: нарисуйте у всех нижеуказанных четырёхугольников:



прямые линии, которые касаются углов и параллельны диагоналям. Как называются возникающие при этом четырёхугольники? Поищите взаимосвязи между свойствами тех четырёхугольников, которые Вы нарисовали в первую очередь, и тех описанных четырёхугольников, которые Вы нарисовали потом. Например: если внутренний четырёхугольник обладает диагоналями одинаковой длины, то описанный вокруг него четырёхугольник становится равносторонним.

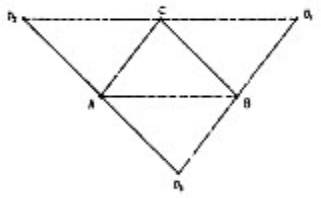
Упражнение 3: Здесь нарисованы разные равнобедренные трапеции. (Лучше всего раздать ученикам ксерокопии). Задача учеников заключается в том, чтобы они нарисовали прямые линии через углы трапеции, причём эти прямые линии должны быть параллельны двум диагоналям трапеции, и чтобы они сравнили нарисованные фигуры друг с другом. Четыре прямые линии, касающиеся углов, всегда образуют ромб. Однако разные ромбы по форме сильно отличаются друг от друга. Есть ромбы, которые по форме похожи на квадрат, в то время, как другие ромбы сильно отклоняются от формы квадрата. Сравнение предназначено для того, чтобы задать следующий вопрос: возможно ли построить равнобедренную трапецию так, чтобы описанный вокруг неё четырёхугольник был квадратом?



Решение: если построить трапецию, приходится исходить из диагоналей, перпендикулярных друг к другу.

Упражнение 4: аналогичное 3-му упражнение, но теперь мы должны исходить из фигуры, показанной на рисунке 6 вышеуказанного изображения четырёхугольников и их разных степеней регулярности.

Упражнение 5: на доске нарисованы три точки A, B и C. Определите четвертую точку D так, чтобы четыре точки, если их соединить, образовали параллелограмм.



Кто из учеников оценивает положение точки D точнее всех остальных учеников? Задавая этот вопрос, мы замечаем, что есть три решения этого упражнения.

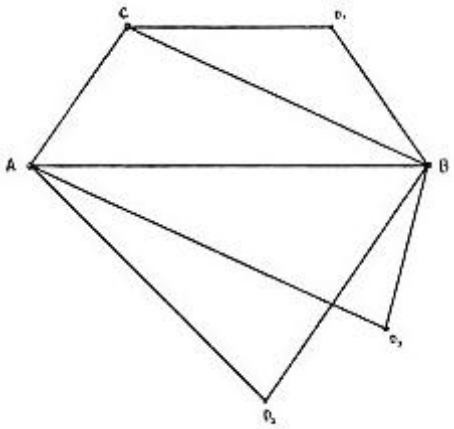
а) три ромба (ABC – равносторонний треугольник);

б) один ромб и два параллелограмма (ABC – равнобедренный треугольник);

в) один прямоугольник и два параллелограмма (ABC – прямоугольный треугольник);

г) один квадрат и два параллелограмма (ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник).

Упражнение 6: на доске нарисованы три точки A, B и C. Мы заставляем учеников определить четвёртую точку D (т.е. оценить её положение), так что точки A, B, C и D, если их соединить, образуют равнобедренную трапецию. Оказывается, снова есть три решения.

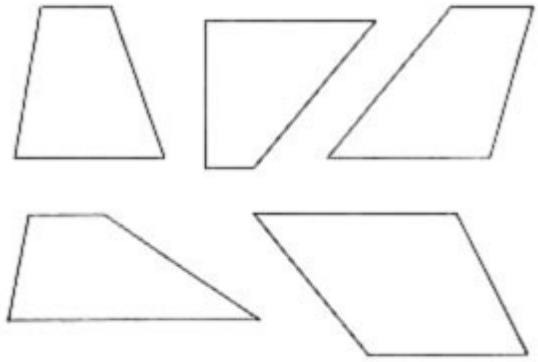


Три трапеции обладают одной общей описанной окружностью.

Замечания к упражнениям 5 и 6:

Целесообразно повторить оценку четвёртой точки D как можно большее число раз, и, по возможности, на доске и в разных положениях, поскольку ученик, если он находится перед (или за) листом бумаги, наверняка лист бумаги будет поворачиваться, тем самым уменьшая усилие, направленное на соображение и силу воображения.

Трапеции не всегда равнобедренные. Мы заставляем учеников нарисовать разные трапеции, не являющиеся равнобедренными.



Число определяемых параметров разных четырёхугольников

В случае нерегулярного четырёхугольника число определяющих параметров можно найти следующим образом: любой нерегулярный четырёхугольник состоит из двух треугольников. Один из этих двух треугольников определяется тремя параметрами. Для определения второго треугольника нам нужно ещё два дополнительных параметра. Всего нам нужно пять параметров.

В принципе, можно найти число определяющих параметров любого четырёхугольника путём размышления. С другой стороны, можно также их найти, исходя из «опыта»: если перед учеником стоит задача нарисовать данный определённый четырёхугольник с помощью циркуля и линейки, он наверняка поймёт, сколько параметров ему необходимо для определения нерегулярного четырёхугольника. (Несмотря на «нематематический характер» этого подхода, этот подход тем не менее служит цели понимания того, что это такое – определение четырёхугольника с помощью подходящих параметров).

Например: данная трапеция должна быть нарисована ещё раз.

оригинал копия оригинал копия

Определяющие параметры, использованные учеником при копировании, мы закрасим. Даже если мы выбираем разные определяющие параметров, их число остаётся одинаковым. В нашем вышеуказанном случае (трапеция) есть четыре определяющих параметра.

Нерегулярный четырёхугольник – 5 определяющих параметров

Трапеция – 4 определяющих параметра

Равнобедренная трапеция

Параллелограмм – 3 определяющих параметра

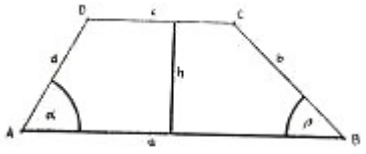
Фигура на рис. 6 (дельтоид)

Прямоугольник – 2 определяющих параметра

Ромб

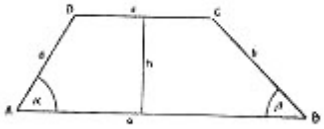
Квадрат – 1 определяющий параметр

Упражнение 7: Перед одним учеником стоит задача, заключающаяся в том, что он следит за тем, чтобы все его товарищи по школе нарисовали одинаковую по форме трапецию (или другой четырёхугольник). Ученику приходится размышлять о том, какими параметрами он хочет определить форму трапеции.

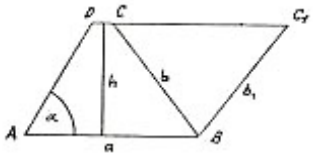


Есть два варианта:

а) Все ученики строят согласованные трапеции. Это относится тому случаю, когда данное определение параметров недвусмысленно. Пример недвусмысленного определения является следующим: длинная прямая линия (одна из параллельных линий) a = 7 см и два смежных угла $\alpha = 60^{O}$ и $\beta = 45^{O}$. Расстояние меду двумя параллельными линиями составляет 3,5 см.



б) Трапеции, нарисованные учениками, не все согласованны. Это относится к тому случаю, когда данное определение приводит к двум разным решениям (или к более большому количеству решений).



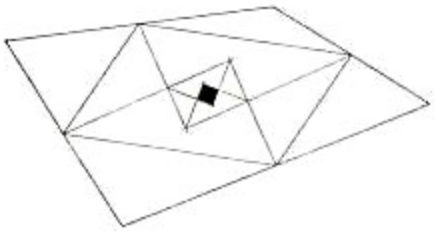
Например: трапеция состоит из длинной параллели a = 6 см, $\alpha = 60^{O}$, одного бедра b = 5 см, высота h = 4 см.

Возвращение к квадрату, исходя из нерегулярного четырёхугольника:

1. Мы соединяем серединные точки четырёх сторон и получаем параллелограмм.

2. Биссектрисы четырёх углов параллелограмма образуют прямоугольник.

3. Биссектрисы четырёх углов прямоугольника образуют квадрат.



Геометрия треугольника

Исходя из равностороннего треугольника, все остальные треугольники можно получить за счёт движения равностороннего треугольника.

Передвигая высоту С вверх и вниз параллельно к вертикальной оси (при прочих равных условиях, то есть точки А и В остаются неизменными), мы получаем равнобедренные треугольники. Опишите изменения сторон и углов равностороннего треугольника при передвижении точки С.

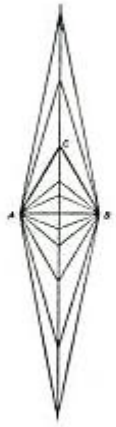
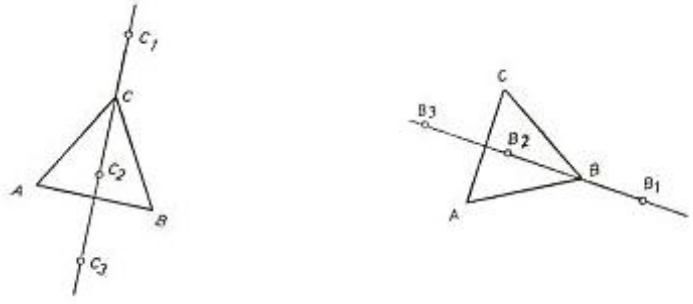


рис. 1

На рисунке высоту треугольника сначала удвоим и утроим, потом два раза подряд разделим пополам. Потом сделаем то же самое вниз, так что получится симметрическая фигура (рисунок 1).

Упражнение: Нарисуйте два равносторонних треугольника на доске. Один ученик будет, исходя из точки С, рисовать от руки биссектрису угла в точку С до точек C_1, C_2, C_3. Другой ученик будет, исходя из точки В второго треугольника, рисовать биссектрису угла в точке В до точек B_1, B_2 и B_3 (рис. 2).



Постройте аналогичные рисунку 1 фигуры:

Точки А и С неизменяемы, точка В передвигается. Точки В и С неизменны, точка А передвигается.

Постройте три нарисованные фигуры в одном и том же рисунке (рисунок 3).

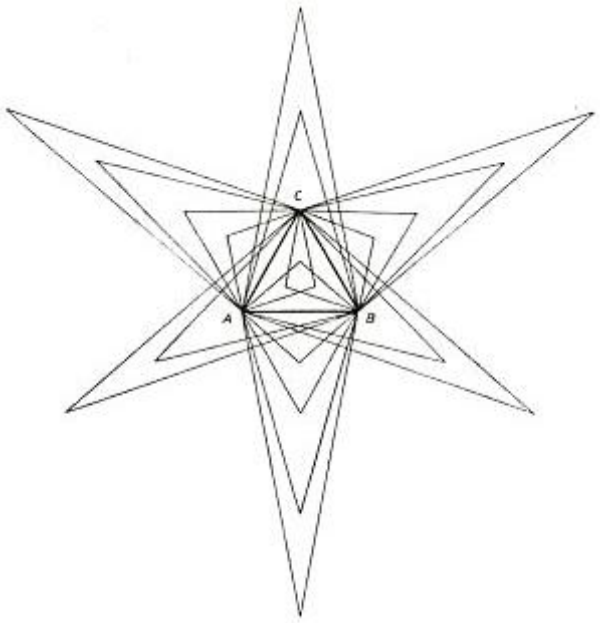


рис. 3

Нарисуйте равносторонний треугольник и передвиньте высоту С параллельно основной линии АВ. Не только форма, но и стороны, и углы равностороннего треугольника изменяются. Опишите эти изменения. Какие виды треугольника получаются при передвижении точки С?

На рисунке 4 передвинули угол С по четыре раза направо и налево. Объём передвижения составляет в каждом случае одну четверть основной линии. Постройте две соответствующие фигуры так, чтобы точка А и точка В передвигались параллельно противоположной стороне.

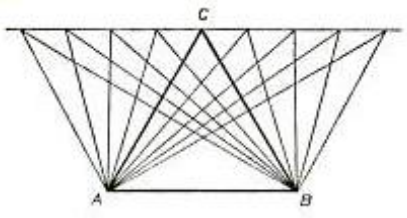
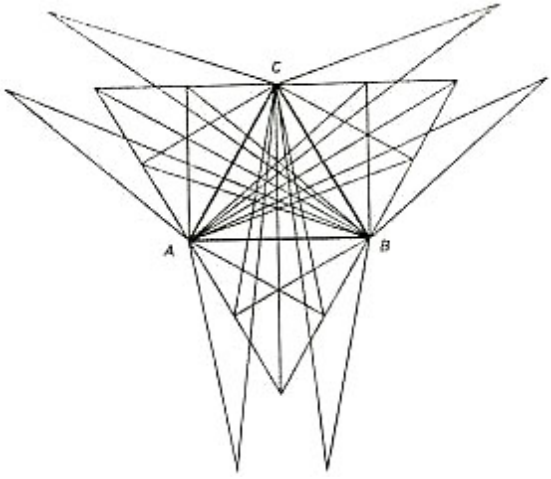


рис. 4

На рисунке 5 показаны все три фигуры. Углы были передвинуты три раза в каждую сторону. Объём передвижения составляет в каждом случае половину основной стороны (рис. 5)



Упражнение: нарисуйте на доске согласованные треугольники в разных положениях (лучше всего с помощью шаблона из картона). Нарисуйте от руки у одного треугольника параллельную к противоположной стороне линию.

Ученики должны будут рисовать соответствующие параллельные линии у других треугольников (рис. 6).

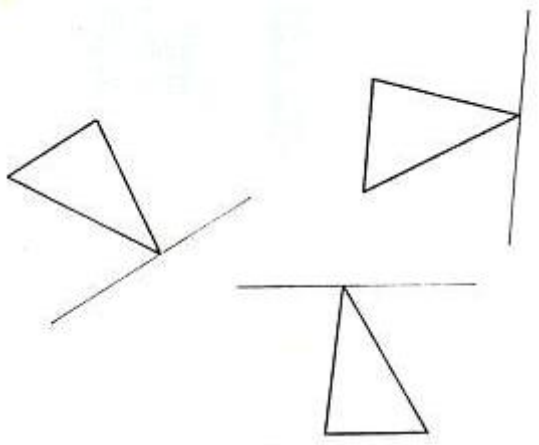


рис. 6

Если рисовать все линии параллельными, мы получаем треугольники, которые по форме похожи на первые. Задача, которая заключается в том, чтобы найти соответствующие параллельные линии, усложняется, если нарисованные в самом начале треугольники очень похожи на равносторонние треугольники.

Соответствующее упражнение с треугольниками, которые не все согласованы между собой (рис. 7).

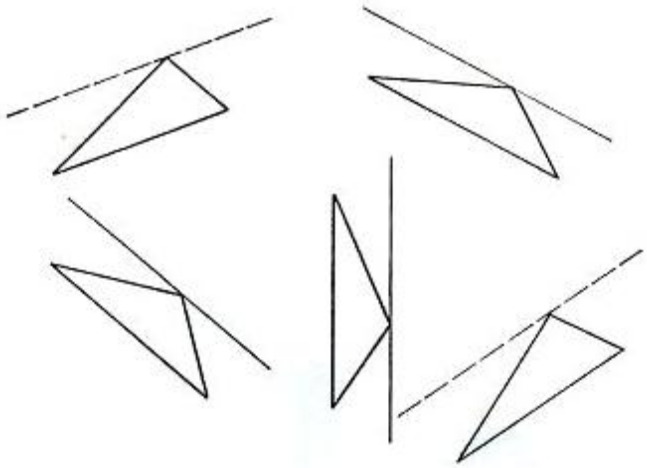


рис. 7

Задача, которая заключается в том, чтобы найти соответствующие прямые линии становится сложнее, если несогласованные между собой треугольники по форме и по величине очень похожи друг на друга, то есть если они почти согласованы между собой.

Точка пересечения высот треугольника.

Особые линии внутри треугольника пересекаются:

Биссектрисы пересекаются в точке – центре вписанной в треугольник окружности. Серединные перпендикуляры пересекаются в точке – центре описанной вокруг треугольника окружности.

Медианы, то есть линии, делящие стороны пополам, пересекаются в центре тяжести.

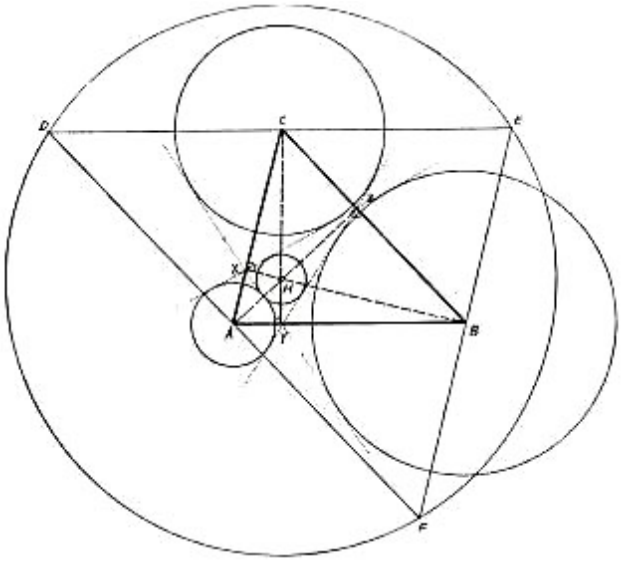
По всей вероятности, точка пересечения высот треугольника в этом смысле пуста. Мы ограничиваемся констатацией того, что точка пересечения высот расположена:

а) внутри треугольника в случае остроугольного треугольника;

б) вне треугольника в случае тупоугольного треугольника;

в) в высшей точке прямого угла в случае прямоугольного треугольника.

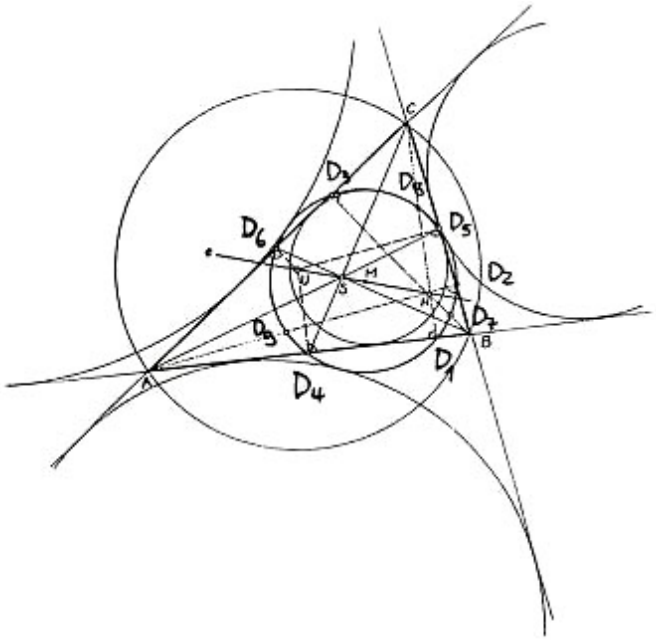
Тем не менее, точка пересечения высот треугольника служит следующей цели: мы найдём новые взаимосвязи и сделаем резюме главы, затрагивающей точки.



Начнём с того, что мы рисуем параллельные противолежащим сторонам линии, проходящие через углы треугольника. Мы получаем согласованные треугольники, фигуры, похожие на ромб и треугольник DEF, похожий на треугольник ABC. Высоты треугольника ABC превращаются в перпендикуляры в середине каждой стороны нового треугольника DEF. Как перпендикуляры в середине каждой стороны треугольника пересекаются в одной точке, так и высоты пересекаются в одной точке. Потом мы соединяем точки X, Y и Z (см. рисунок) между собой и удлиняем эти прямые линии. Биссектрисы треугольника XYZ представляют собой высоты треугольника

ABC. Биссектрисы внешних углов треугольника XYZ совпадают со сторонами треугольника ABC. Как биссектрисы смежных углов, они перпендикулярны друг другу. Вершины треугольника ABC представляют собой центры окружностей, касающихся извне сторон треугольника XYZ.

Точка пересечения высот H является и точкой – центром описанной вокруг треугольника DEF окружности и центром вписанной в треугольник XYZ окружности. Однако красивейшее отражение строгих закономерностей и внутренней взаимосвязи особых точек мы найдём в круге Фейербаха и в прямой линии Эйлера.



Вдоль прямой Эйлера e мы находим следующие точки:

U = центр описанной окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к каждой стороне);

S = центр тяжести (точка пересечения медиан - линий, делящих стороны пополам).

H = точка пересечения высот треугольника, причём отрезок UH делится точкой S в отношении 1:2 (один к двум). В середине отрезка UH расположена точка M, которая представляет собой центр окружности Фейербаха, также называемой **окружностью девяти точек:**

- основания высот треугольника ABC, то есть точки D_1, D_2, D_3;

- основания медиан треугольника ABC, то есть точки D_4, D_5, D_6;

- середины отрезков от точки пересечения высот H треугольника ABC до его вершин, то есть точки D_7, D_8, и D_9.

Окружность девяти точек, то есть окружность Фейербаха, касается вписанной окружности изнутри, все три вневписанные окружности снаружи, а

её радиус представляет собой половину радиуса описанной вокруг треугольника окружности.

Источник: Энциклопедический словарь юного математика.
Москва: «Педагогика», 1989.

У каждого треугольника имеется единственная окружность девяти точек. Это – окружность, проходящая через следующие три тройки точек, положение которых определено для треугольника на вышеуказанном рисунке: основания его высот D_1, D_2 и D_3, основания его медиан D_4, D_5 и D_6, середины D_7, D_8 и D_9 отрезок прямых от точки пересечения его высот H до его вершин. Эта окружность, найденная в XVIII веке великим учёным Л. Эйлером (поэтому её часто также называют окружностью Эйлера), была заново открыта в следующем столетии учителем провинциальной гимназии в Германии. Звали этого учителя Карл Фейербах (он был родным братом известного философа Людвига Фейербаха).

Окружность эту очень легко построить, если знать два её свойства. Во-первых, центр окружности девяти точек лежит в середине отрезка, соединяющего центр описанной вокруг треугольника окружности с точкой H – его ортоцентром (точка пересечения его высот). Во-вторых, её радиус для данного треугольника равен половине радиуса описанной вокруг него окружности.

Геометрия круга

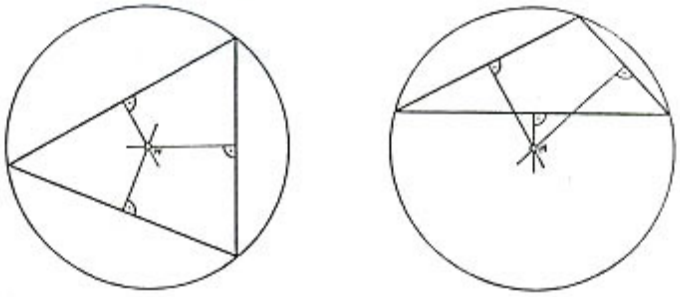
Геометрия без инструментов в течение 5 и 6 классов, в которой круг играет важную роль, будет позже – в течение 8 и 9 классов – заметно облегчать и углубленное мыслительное проникновение в проблемы, затрагивающие круг и его свойства. С 5 класса ученик ощущает (путём совершения свободных вращающих движений) круг, в какой-то степени, в несерьёзной форме: он играет с кругом. Начиная с 8 класса, он работает с линейкой и циркулем. Спокойное наблюдение, размышление, предположение, определение и усвоение геометрических фактов теперь выдвигаются на передний план. Как при изображении предыдущих фигур (треугольник, четырёхугольник), так и при изображении круга мы выбрали наглядный путь изображения и подробный постепенный подход к пониманию. Мы сдержанно отнеслись к готовым теоремам. Результаты должны быть достигнуты с

помощью процессов движения и могут быть изложены в очень простой и доступной форме.

Мы попытаемся применить такой постепенный и наглядный подход к пониманию, опираясь на несколько примеров, затрагивающих окружность.

Окружность Фалеса

Мы рисуем остроугольный и тупоугольный треугольники, строим обе описанные окружности и сравниваем фигуры.

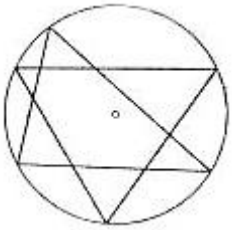


В случае остроугольного треугольника центр описанной окружности расположен внутри треугольника.

В случае тупоугольного треугольника центр описанной окружности расположен вне треугольника.

Чем сильнее ученик ощущает разницу между положением центра описанной окружности внутри треугольника и её положением вне треугольника, тем более самопроизвольно ученику приходит в голову (можно даже сказать: напрашивается) мысль о третьей возможности. Вполне возможно, что центр описанной окружности не находится ни внутри, ни вне треугольника, а лежит на его стороне. Это угаданное или предчувствуемое решение действительно существует в случае прямоугольного треугольника. Собственная мысль ученика оказывается правильной.

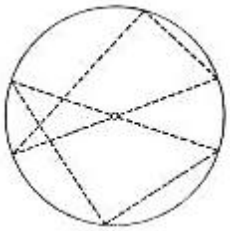
Мы рисуем три круга. В первый круг мы вписываем любые остроугольные треугольники. Все три вершины треугольника расположены на окружности. Центр круга находится внутри треугольников.



Первый круг

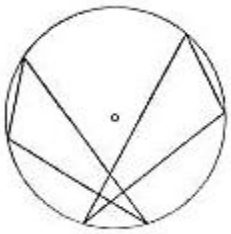
Треугольники, вписанные во второй круг, становятся прямоугольными, если одна сторона совпадает с диаметром (гипотенуза).

Или: прямоугольные треугольники умещаются в полукруге Фалеса.



Второй круг

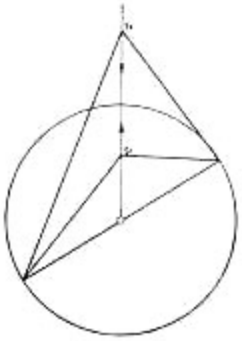
Внутри третьего круга мы рисуем любые тупоугольные треугольники. Центр круга расположен вне площади треугольника.



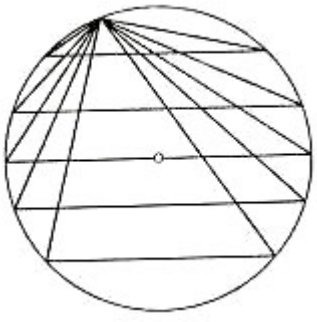
Третий круг

Стремление, направленное на то, что логическое доказательство лишь следит за определёнными шагами построения, позволяет нам выбрать разные подходы. Мы Вам представляем ещё пару таких подходов:

Вершины двух треугольников над диаметром круга (одна вершина расположена внутри, другая – вне окружности) приближаются друг к другу. Точка, в которой они приблизились друг к другу, находится на окружности, и треугольник – прямоугольный.

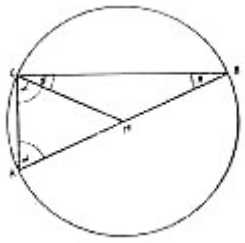


Выберем на окружности фиксированную точку – вершину треугольника – и будем перемещать его основание параллельно горизонтальному диаметру так, чтобы треугольник оставался вписанным. Площадь треугольника увеличивается и уменьшается в зависимости от этого. Переход от тупоугольного треугольника к остроугольному находится только там, где основание треугольника совпадает с горизонтальным диаметром. Диаметр в то же время представляет собой самую длинную хорду. Угол, опирающийся на диаметр, является прямым.



Наконец, мы представляем Вам легко понятное и убедительное доказательство:

Медиана CM треугольника ABC равна радиусу круга и делит треугольник на два равнобедренных треугольника ABM и BMC.



Из этого следует:

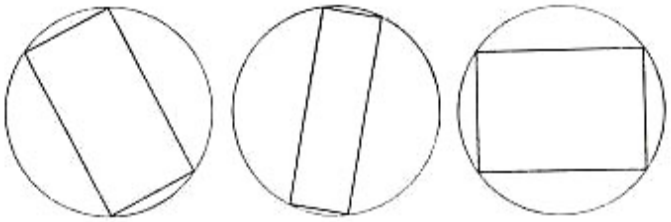
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180^O$ (сумма внутренних углов треугольника ABC)

$2\alpha + 2\beta = 180^O$

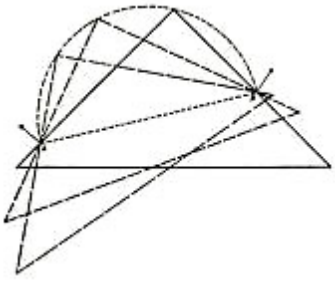
$\alpha + \beta = 90^O$

Доказательством может служить следующий подход: некоторые ученики от руки рисуют на доске по одному кругу и по одному прямоугольнику произвольной формы.

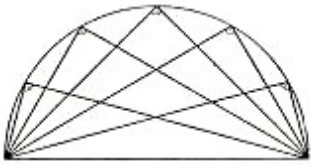


Потом мы просим учеников нарисовать одну диагональ прямоугольника (которая одновременно представляет собой диаметр и ось симметрии круга) и затем стереть половину круга и прямоугольника. Мы получаем в каждом из трёх вышеуказанных случаев прямоугольные треугольники, вписанные в полуокружности.

В этом контексте мы воспользуемся случаем ввести понятие «геометрическое место» и закрепить его в памяти учеников. Мы перемещаем прямоугольный треугольник из картона между двумя забитыми гвоздями, как показано на рисунке. Точка C при этом описывает окружность (так называемую окружность Фалеса).



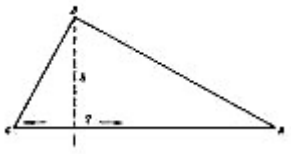
В заключение главы, затрагивающей окружность Фалеса, уместно представить вам следующую фигуру: множество прямых углов, вершины которых находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, закрашенных разными цветами.



Применение на практике

Слово «геометрия» означает «землемерие». Поэтому мы рекомендуем Вам пользоваться любой возможностью для реальных измерений на местности.

Мы делим учеников на маленькие группы и предлагаем каждой группе определить площадь и периметр треугольников, обозначенных на земле. Периметр треугольников найти легко, но как найти его площадь, ведь в формуле S = gh/2 фигурирует высота, длина которой неизвестна?

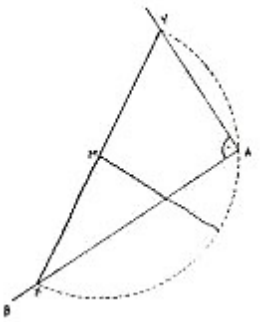


H – точка основания перпендикуляра

Сначала мы просим учеников найти примерное расположение точки H, то есть точки основания перпендикуляра. Мы идём по основанию AC, расставив руки вдоль него, а взгляд направляем на вершину B. Когда направление взгляда становится перпендикулярным основанию, мы стоим на точке H. Это – хорошее приближение к результату. Но как мы можем достичь большей точности?

По теореме Фалеса точка H лежит на окружности с диаметром BC (угол BHC = 90^{O}, то есть он – прямой) и на окружности с диаметром BC (угол BHC = 90^{O}, то есть он тоже прямой). Построив эти две окружности, мы определим точное положение точки H.

Для этого находим точку M – середину AB – и закрепляем в ней верёвку длиной AM. Свободный конец верёвки в натянутом состоянии опишет искомую окружность.



Аналогично на стороне BC*.

Вообще, этим способом легко строить прямые углы**.

Построим прямой угол из точки A над расстоянием AB. От любой точки M мы укрепляем верёвку до A и двигаем её вокруг M. X представляет собой точку пересечения расстояния AB. Исходя из точки зрения M, можно легко

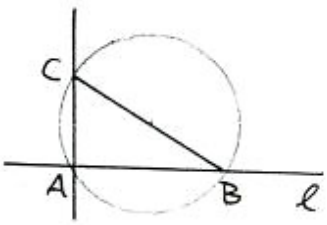
определить эту точку пересечения. Конец верёвки пересекает линию точки зрения в точке Y, то есть в конечной точке диаметра. Угол XAY – прямой.

Мы получаем ещё более надёжные результаты, когда пользуемся специальными инструментами.

---

*Мы сейчас в состоянии измерить высоту и определить площадь треугольника.

**Пусть даны прямая l и точка A на ней. Построим прямую, проходящую через точку, перпендикулярную l.



Проводим через A любую окружность с центром вне прямой. Через точку B – вторую точку пересечения этой окружности с прямой l – проводим диаметр BC.

Тогда прямая AC и будет искомым перпендикуляром, поскольку вписанный угол BAC опирается на диаметр, и, следовательно, равен 90^O. Как мы видим, это построение очень экономично: потребовалось провести всего три линии. Можно доказать, что меньшим числом линий обойтись нельзя.

Углы, вписанные в окружности

Впишем в окружность правильный восьмиугольник. Все восемь центральных углов равны.

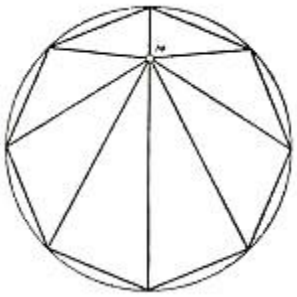


рис. 1

$\varphi = 2\pi/8 = 360^O/8$

$\boldsymbol{\varphi = 45^O.}$

Теперь представим, что точка M перемещается вверх по вертикальной диагонали. Восемь углов становятся попарно равными.

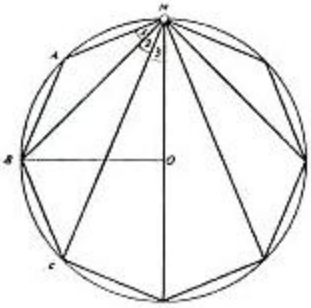


рис. 2

В момент, когда точка М попадает на окружность, углов становится шесть. Они все равны между собой (почему?)

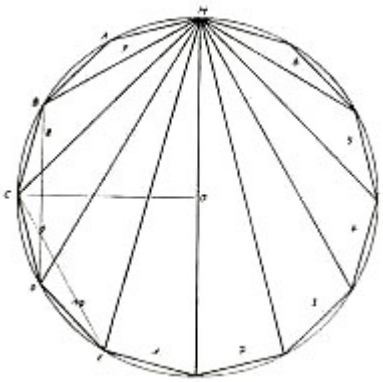


рис. 3

$\alpha = 180^O(n - 2)/n$

Для восьмиугольника:

$\alpha = 180^O(8 - 2)/8$

$\mathbf{\alpha = 135^O}$

Следовательно, каждый из них имеет величину, равную $\mathbf{22{,}5^O}$ (например, угол 1 = $22{,}5^O$ и угол 2 = $22{,}5^O$).

На рисунке 1 на предыдущей странице показано, что угол в правильном восьмиугольнике составляет 1,5; причём, R = 90^O, то есть R – прямой угол. Сумма углов восьми равнобедренных треугольников равна 16R. Из 16R (= 1440^O) надо вычесть полный угол в центре круга. Сумма восьми углов восьмиугольника составляет 12R, то есть 1080^O. Если мы разделим эту сумму на восемь (количество углов), то получим как результат по углу 1,5R.

На рисунке 3 сумма углов основания равнобедренного треугольника ABM составляет 45^O. Один угол основания составляет $22{,}5^O$.

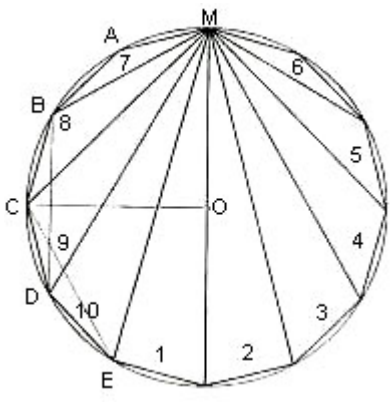
Сумма углов равнобедренной трапеции ABCM составляет 4R, то есть 360^O. Оба острых угла (имеются в виду 1 и 2) составляют 45^O, то есть 180^O - 135^O или (360^O - 270^O) /2 = 45^O.

Из этого следует, что угол 2 составляет $22{,}5^O$. То же самое доказательство относится к правильному двенадцатиугольнику. (Что касается углов с вершиной в точке М, то их мы обозначаем такими же цифрами, какими мы обозначали треугольники).

Величина угла правильного двенадцатиугольника составляет:

20/12R = 5/3R = 150^O, где R = 90^O.

Величина угла при основании равнобедренного треугольника ABM, то есть угла 7, составляет 15^O. В равнобедренной трапеции ABCM находится острый угол 7 + 8, величина которого составляет 30^O. Следовательно, величина угла – 15^O.



В равнобедренном треугольнике BDM угол B равен 150^O – 2 x 15^O = 120^O, величина одного угла при основании составляет 30^O. Следовательно, угол 9 равен 15^O.

В равнобедренной трапеции ВСЕМ величина тупого угла составляет 150^O - 15^O = 135^O. Остаётся 45^O (углы 8 + 9 + 10). Остаётся 45^O (углы 8 + 9 + 10). Следовательно, величина угла 15 составляет 15^O. Величина углов 9, 10 и 1 вместе составляет 45^O. (Острый угол в прямоугольном равнобедренном треугольнике СОМ). Один угол – 15^O.

Зафиксируем одну из сторон правильного двенадцатиугольника (рис. 4).

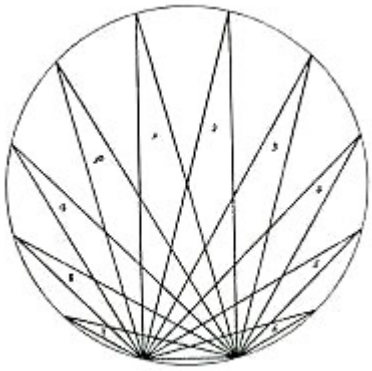


рис. 4

Рассмотрим множество треугольников АВС, построенных таким образом, что С пробегает все остальные вершины нашего двенадцатиугольника. Эти треугольники образуют что-то вроде веера. При этом все 10 углов, опирающихся на хорду АВ, равны между собой.

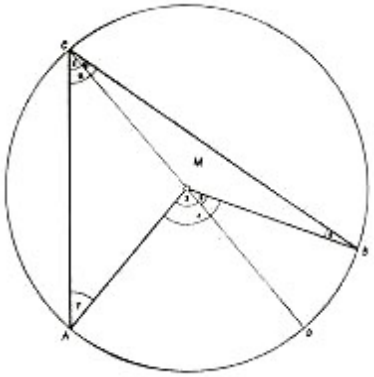
Доказательство легко понятно. С помощью этого доказательства мы найдём ещё один результат (для центрального угла). В то же время мы в состоянии показать ученику, что вышеуказанный факт (все углы, опирающиеся на одну и ту же хорду или дугу, равны между собой) относится не только к разделённому кругу, но и к любому другому случаю.

Это доказательство исходит из того, что следующие факты ученику уже известны:

1. Центральные углы, соответствующие равным дугам, между собой равны.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух остальных внутренних углов.

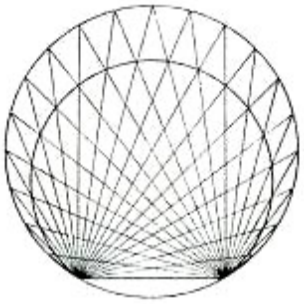
3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.



Доказательство: угол АМВ представляет собой центральный угол, опирающийся на дугу АВ, а угол АСВ является вписанным в окружность углом, опирающимся на дугу АВ. Треугольники АМС и ВМС равнобедренные. Из этого следует, что углы 5 и 7 с одной стороны и углы 6 и 8 с другой стороны равны между собой. Угол 5 вполовину меньше угла 3, и угол 6 вполовину меньше угла 4.

Угол 2 вполовину меньше угла 1.

Угол, опирающийся на дугу АВ (угол, вписанный в окружность), вполовину меньше центрального угла, опирающегося на дугу АВ.



В случае окружности Фалеса центральный угол = 180^O и периферийный угол = 90^O. Множество периферийных углов, то есть углов, опирающихся на дугу АВ и расположенных на окружности не одном расстоянии друг от друга, представляет собой красивую фигуру. Точки пересечения сторон треугольников расположены на окружности, радиус которой меньше радиуса первой окружности.

Число Пи

В большинстве случаев число Пи очень быстро появляется на занятиях по геометрии. Оно появляется внезапно и неожиданно, поскольку ученик должен будет как можно скорее вычислить какие-то арифметические задачи с помощью этого числа. Учение ничего не узнает о «борьбе за это число», которая тоже длилась несколько веков. Сначала надо заострить сознание ученика на том, что путь по окружности и путь по диаметру тесно связаны между собой. Существует определённое соотношение между этими двумя величинами.

Измеряя длину окружности, ученик находит, что отношение этой длины к диаметру чуть-чуть больше трёх. С помощью построений вписанных и описанных многоугольников ученик приходит к аналогичным познаниям. (При этом нам надо ограничиваться приблизительными величинами, которые мы как можно точнее измерили.

Все данные из: Баравалле, Геометрия в качестве языка форм. Смотрите в списке литературы в конце этого учебника.

В 1700 году до нашей эры площадь круга противопоставляли площади квадрата, длина стороны которого составляла 8/9 диаметра круга.

$(2r - 2r/9)^2 = ((18r - 2r)/9)^2 = (16r/9)^2 = 256r^2/81 = 3{,}16050r^2$

Архимед вычислил число Пи в третьем веке до нашей эры с помощью вписанного в круг и описанного вокруг круга девяностошестиугольников. Он получил два числа:

3 10/70 = 3,142857…

и 3 10/71 = 3,140845…

В 470 году нашей эры в Китае было известно число 355/113 = 3,1415929…

В 510 году нашей эры в Индии существовала следующая инструкция: «Добавьте 4 к 100, умножьте на 8 и прибавьте 6200. Получаемое число близко к кругу (к окружности), если диаметр данной окружности составляет 20000». Данные относятся к числу Пи:

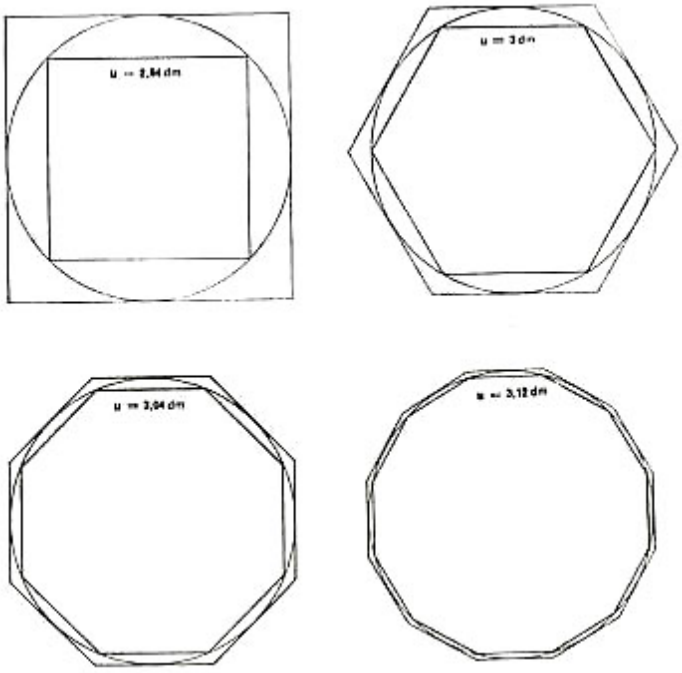
$\pi = 62832/20000 = 3,1416.$

В начале Нового времени (к концу XVI века) 35 десятичных знаков были известными.

В наше время компьютерами вычисляются тысячи десятичных знаков числа Пи. Этот краткий исторический обзор числа Пи поможет ученику понять, насколько интересной и увлекательной являлась история одного вопроса в области математики. В то же время ученик знакомится с видом числа, который ему до сих пор не был известным.

Число Пи представляет собой десятичную дробь, которая никогда не оканчивается и не является периодической.

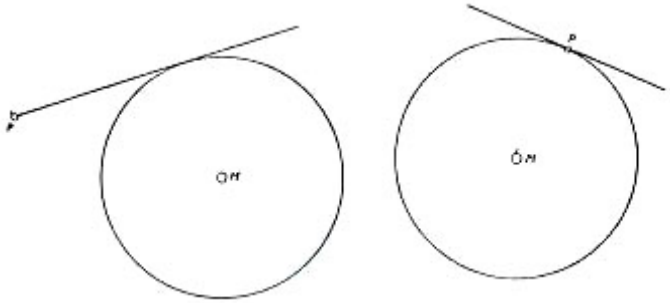
Определение числа Пи с помощью вписанных в круг и описанных вокруг круга многоугольников. Выбирая окружность с диаметром 10 см и тщательно строя, ученик получает пригодные для дальнейшей работы величины.



Касательная

Ученик второго класса, как правило, в состоянии решить следующие две задачи с удовлетворительным результатом:

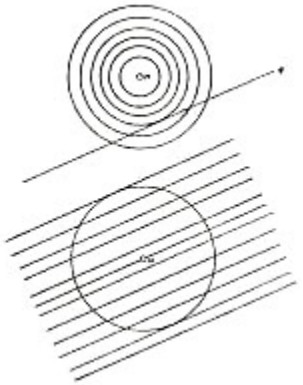
Нарисовать на доске – исходя из точки вне круга – касательную и нарисовать на доске касательную в определённой точке на окружности.



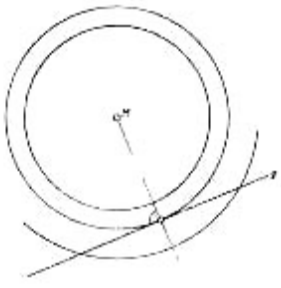
Прямая, нарисованная учеником, наверняка не будет ни секущей, ни прямой линией, не касающейся круга. Нам приходится подвести ученика к мысли о том, что:

- касательная касается круга лишь в одной определённой точке на окружности (первая задача) и
- касательная по отношению к кругу может иметь лишь одно определённое положение.

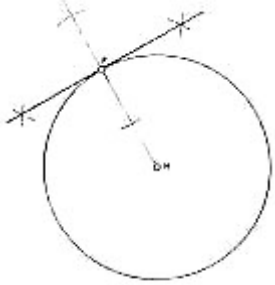
Окружность с центром в точке М постепенно увеличивается до того момента, как она в конце концов касается прямой 2. Где именно расположена точка пересечения? Когда мы рисуем точку, мы оцениваем её положение. Мы рисуем дальнейшие окружности, так что прямая 2 становится секущей. Мы можем и наоборот, передвигать прямую 2 через окружность.



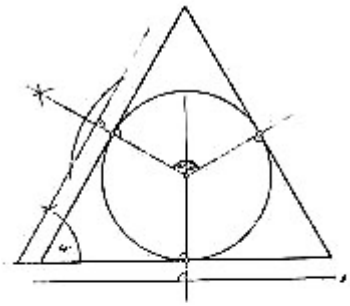
За счёт этих противоположных друг другу движений ученик узнаёт наверняка, что касательная к окружности и радиус круга перпендикулярны друг другу. (Или перпендикуляр в середине хорды пересекает центр круга). Мы углубляем это познание с помощью нескольких простых задач:



а) Нам придётся построить касательную, проходящую через точку Р на окружности. Сначала мы рисуем только радиус РМ, затем продолжаем его за окружность и строим с помощью основного построения прямой угол в расположенной на окружности точке Р.

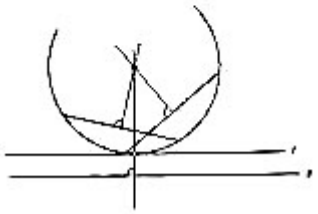


б) Нам придётся построить описанный вокруг круга треугольник, одна сторона которого расположена параллельно данной прямой.

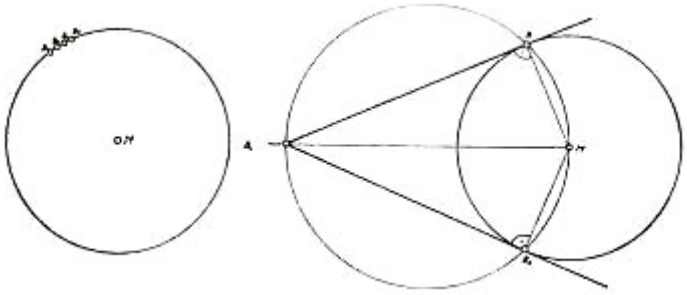


Сначала мы строим касательную, идущую параллельно данной прямой. Потом мы строим в любой точке угол 60^{O} по отношению к касательной. Исходя из центра, мы опускаем перпендикуляр на стороны угла и передвигаем его к окружности. Таким же образом мы получаем третью сторону треугольника.

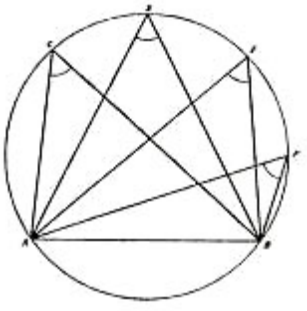
в) Нам придётся построить касательную к дуге окружности. Центр этого круга нам неизвестен. Касательная идёт параллельно данной прямой 2. Мы видим центр круга как точку пересечения перпендикуляра в точке пересечения двух любых хорд. Потом можно построить касательную.



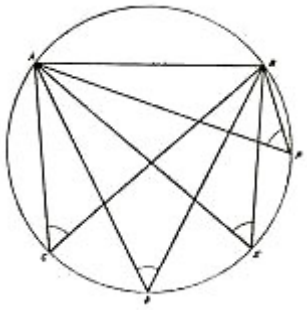
Вернёмся к нашей проблеме, сформулированной в начале главы. Из любой точки А нам придётся построить касательную к данной окружности. Ученики должны угадать и оценить эту точку, в которой касательная, по всей видимости, будет касаться окружности. Но нам надо точно определить точку касания. Какой тип треугольника она образует вместе с точками А и М? Это прямоугольный треугольник, который умещается в полуокружности, построенной над отрезком АМ или в окружности с диаметром АМ. Это – окружность Фалеса.



Окружность геометрического места точек. Исходя из хорды, мы смотрим на вписанные в окружность углы. Они все равны.



Вышеуказанный круг отражается на горизонтальной оси, т.е. горизонтальном диаметре круга.

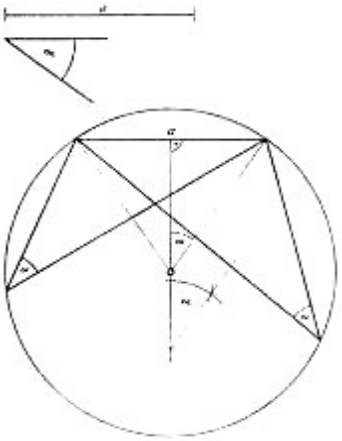


Угол, исходя из которого, мы смотрим на хорду, кажется нам одинаковым. Это относится ко всем точкам большой дуги AB. Эта дуга поэтому представляет собой геометрическое место. Её называют окружностью геометрического места точек.

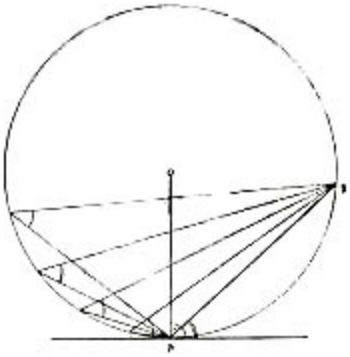
Мы намереваемся нарисовать окружность, исходя из которой, мы смотрим на определённое расстояние под определённым углом. Логические размышления ученика будут следующими:

1. Центр этого круга расположен на серединном перпендикуляре данного отрезка.

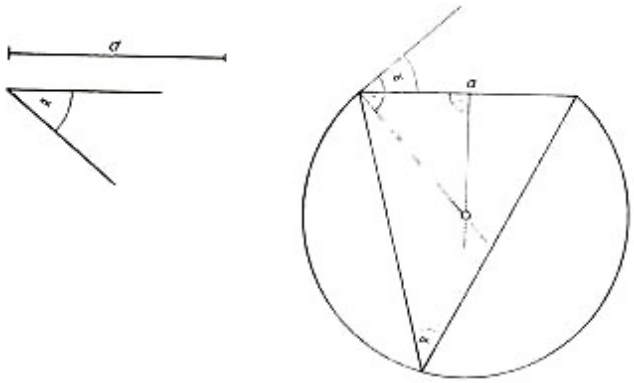
2. Угол в центре вдвое больше, чем вписанный угол. Пространство, которое хорда образует вместе с двумя радиусами, исходящими из его обеих конечных точек, есть равнобедренный треугольник, вершина которого является найденным центром треугольника. Его можно сейчас построить.



Другое построение, которое тоже очень наглядно, представляет собой построение с вписанным углом касательной. Вписанные углы все равны. В крайнем случае, вершина совпадает с точкой A данного расстояния. Более длинное бедро становится хордой, более короткое становится точкой A – или, другими словами, касательная в точке A и хорда образуют угол такой же величины, как вписанный угол. Это – угол между касательной и хордой.

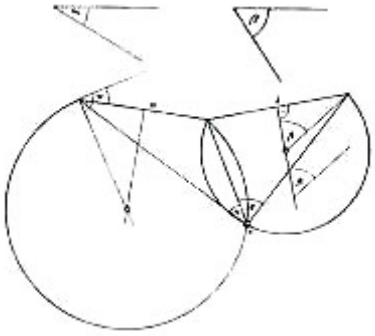


Этот факт позволяет нам найти центр окружности геометрического места точек как точку пересечения серединного перпендикуляра с касающимися радиусами.



Построение окружности геометрического места точек открывает нам целый ряд интересных задач типа тех задач, которые нам приходится решать на практике, например, в рамках топографического измерения.

Мы хотим, например, найти точку, исходя из которой, мы смотрим на два данных расстояния под углом определённой величины: расстояние a под углом α и расстояние b под углом β.



Точки пересечения двух окружностей, показанных на рисунке, представляет собой искомую точку.

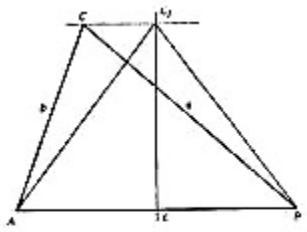
Превращение площадей

Параллелограммы или треугольники с одинаковым основанием и одинаковой высотой по площади одинаковы. Поэтому мы в состоянии превратить форму этих фигур друг в друга, не изменяя при этом площади этих фигур. Условия идентичности величины площади надо строго соблюдать, но что касается формы, мы обладаем большей степенью свободы.

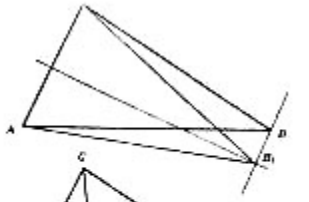
С помощью нижеуказанных упражнений мы пытаемся дать ученику представление о разнообразии фигур неодинаковой формы, но, тем не менее, одинаковой величины. Если, например, мы говорим о «равнобедренном треугольнике», мы констатируем следующее: этому относительно простому понятию соответствует бесконечно большое количество треугольников, отличающихся друг от друга по форме и расположению. Так, мы часто сталкиваемся с ситуацией, что ученики не в состоянии узнавать равнобедренный треугольник, если он не нарисован в прямоугольной форме. Только если ученики узнают равнобедренный треугольник любой формы с первого взгляда, понятие «треугольник» становится неотъемлемой частью мышления учеников. Чтобы достичь этой цели, мало только определять понятие. Надо скорее заставить ученика приобрести опыт тем, что он сам рисует, и тем самым развивает представление о том, что такое треугольник.

Превращение неравнобедренного треугольника в равнобедренный той же площади.

На рисунке угол С перемещается параллельно стороне с. Общая сторона с представляет собой основание равнобедренного треугольника.



К данному неравностороннему треугольнику относятся ещё и другие одинаковые по площади треугольники. Если ученик хочет их найти, он вынужден смотреть на эту проблему по-своему и оторваться от готовых решений.



На рисунке 1 угол В перемещается параллельно стороне b. Сторона b представляет собой основание равнобедренного треугольника.

рис. 1

На рисунке 2 угол А перемещается параллельно стороне а. Общая сторона а является основанием равнобедренного треугольника.

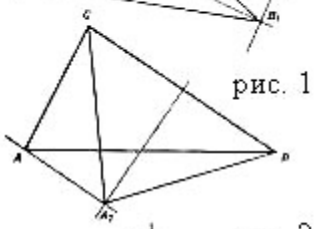


рис. 2

Сопоставление всех трёх вышеуказанных решений на одном и том же рисунке (рис. 3) требует довольно высокого уровня силы воображения.

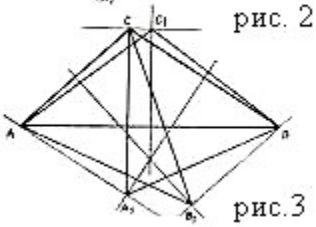
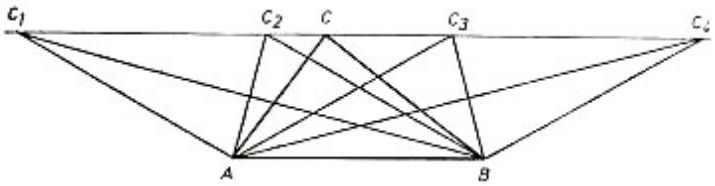


рис.3

Решения, представленные до сих пор, характерны тем, что общая сторона всегда представляет собой основание равнобедренного треугольника. Может быть, нам удастся, исходя из равностороннего треугольника, найти равнобедренный и равный ему по площади треугольник так, чтобы общая сторона стала бедром равнобедренного треугольника. Таким образом, эти понятия – неравносторонний и равнобедренный треугольники – сопоставлены в новой форме.



Мы раздаём ученикам лист бумаги, на котором нарисованы разные неравносторонние треугольники. К каждому треугольнику ученики должны построить одинаковыё по величине площади равнобедренный треугольник.

Мы даём ученикам следующие данные:

1. Вид равнобедренного треугольника (тупоугольный и остроугольный).
2. Общая сторона данного и строимого треугольников.

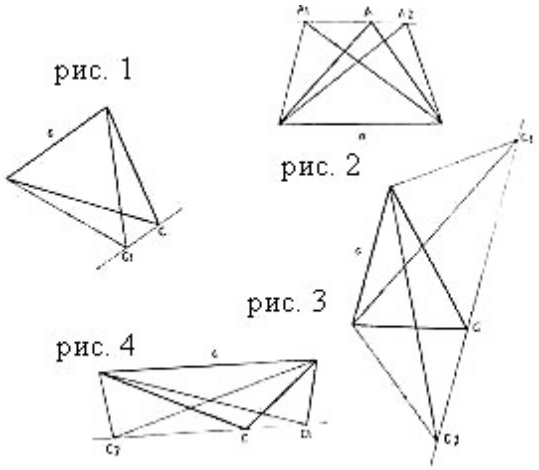
3. Будет ли общая сторона основанием или бедром равностороннего треугольника?

Рисунок 1: сторона c является основанием равного по площади остроугольного треугольника.

Рисунок 2: сторона a представляет собой бедро равного по площади остроугольного треугольника.

Рисунок 3: сторона c является бедром равного по площади остроугольного треугольника.

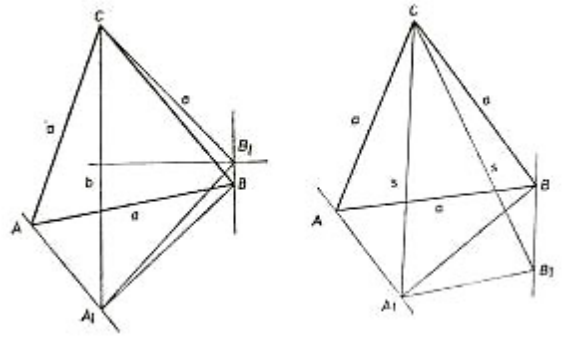
Рисунок 4: сторона c является бедром равного по площади тупоугольного треугольника и т.д.



Упражнение: нарисуйте равносторонний треугольник со стороной a = 6 см. Превратите этот треугольник в равнобедренный треугольник:

а) с основанием b = 8 см.

б) с бедром s = 8 см.



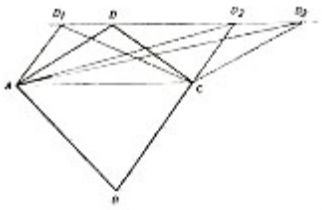
Решение этого упражнения осуществляется за счёт двойного передвижения.

Превращение нерегулярного четырёхугольника

Нарисуйте нерегулярный четырёхугольник ABCD. Переместите точку D параллельно диагонали AC.

а) Покажите, что площадь четырёхугольника не изменяется.

б) Форма четырёхугольника изменяется. Какие особые формы могут появиться в ходе процесса измерения? (Трапеции, из выпуклого четырёхугольника может возникнуть вогнутый четырёхугольник, причём переход осуществляется через форму треугольника.



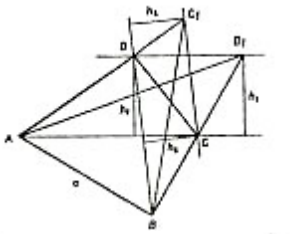
D_1 – трапеция.

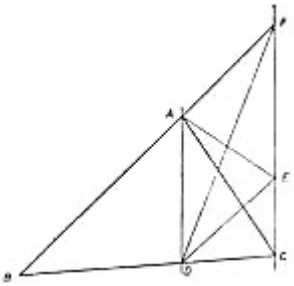
D_2 – треугольник.

D_3 – вогнутый четырёхугольник.

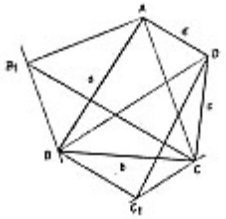
Превратите четырёхугольник ABCD в треугольник той же площади так, чтобы a стала одной из сторон треугольника.

Прежде чем построить, мы просим ученика высказать его мнение по поводу того, какие углы он может переместить и каким образом это перемещение нужно осуществить для того, чтобы получить результат. (Нарисуйте одинаковые высоты одинаковых по величине площади треугольников). Постройте для данного треугольника любой равный по площади четырёхугольник. (Вышеописанное упражнение, только наоборот).

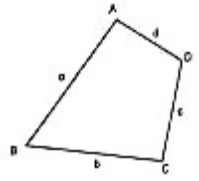




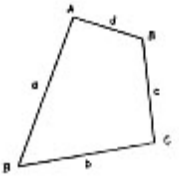
Отрежьте от данного треугольника ABC любой треугольник ACD и замените его равным по площади треугольником ADE. Треугольник превратился в четырёхугольник. Четырёхугольник ABDE, в свою очередь, превратился в треугольник BDF. Из данного треугольника ABC мы получили новый треугольник с более коротким основанием.

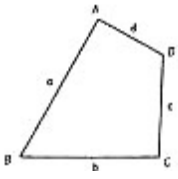


Нижеуказанные неправильные четырёхугольники должны быть превращены в равные по площади трапеции.



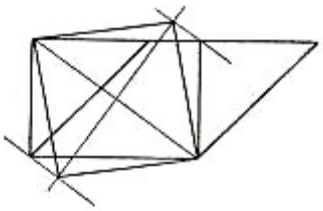
В случае фигуры 1 надо построить трапецию так, что сторона d четырёхугольника становится параллельной линией трапеции. Это значит, что стороны b и d должны становиться параллельной линией трапеции. Если переместить B параллельно прямой AC или C параллельно прямой BD, можно достичь этого. К фигуре 1 оба решения построены (фигура 1 = ABCD). В случае фигуры 2 надо построить трапеции так, чтобы b становилась параллельной линией трапеции и т.д.





Примеры.

1. Превратите данный прямоугольник в ромб так, чтобы:

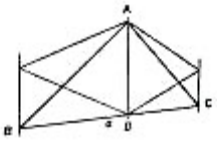


а) сторона ромба была равна длине прямоугольника;

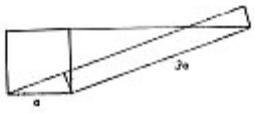
б) одна диагональ ромба совпадала с одной диагональю прямоугольника.

2. К данному прямоугольнику нарисуйте одинаковые по площади ромбы, три угла которых совпадают с тремя углами прямоугольника. (Из восьми возможных решений мы нарисовали лишь 4.

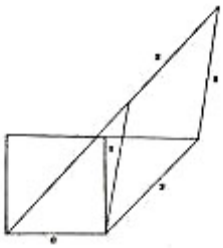
3. Постройте дельтоид равной площади с данным треугольником ABC. На стороне a расположена точка D. Одна диагональ дельтоида должна совпадать с расстоянием AD. Где лежит точка D, если мы вместо дельтоида хотим получить ромб?



4. Превратите квадрат в прямоугольник, длина которого в три раза длиннее, чем сторона квадрата.



5. Превратите данный прямоугольник в одинаковый по площади ромб с данной стороной s. Какое соотношение существует между длиной s и формой ромба?



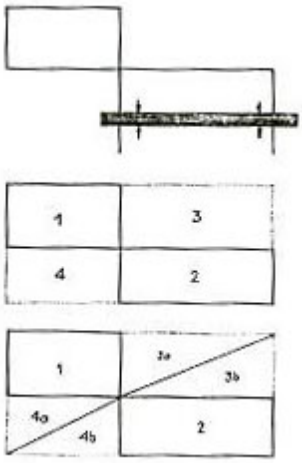
При решении вышеуказанных примеров требуется двойное перемещение.

Теорема Гномона

Вообще говоря, нам легче вместо площадей обсудить линии. Так, например, мы легко узнаём очень незначительное отклонение от окружности, в то время, как нам нелегко даётся решение, какая из указанных площадей больше.

Могли бы мы измерить и вычислить обе площади? Существует ли геометрический способ, который позволяет нам прийти к недвусмысленному решению? С этой целью мы рисуем две площади так, чтобы они соприкоснулись в одном углу. Мы оставляем нижнюю длину второй площади открытой и ограничиваем её линейкой, которую мы перемещаем вниз. В тот

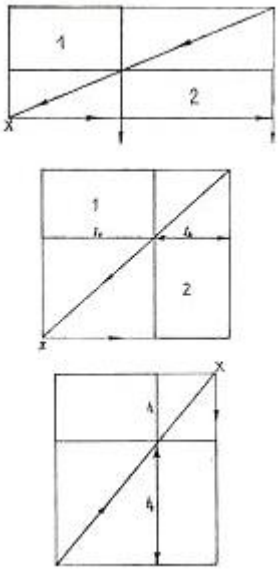
момент, как ученики придерживаются мнения, что обе площади по величине одинаковы, они кричали «Стой!» Мы повторяем эту попытку несколько раз. Только после нескольких попыток мы рисуем нижнюю длину. Если рисовать рамку вокруг этих двух площадей, мы получаем два новых прямоугольника, которые мы называем прямоугольником 3 и прямоугольником 4. Каждый из этих двух новых прямоугольников делится пополам с помощью диагонали.



В результате этого деления мы получаем два верхних треугольника 3a и 4a, и два нижних треугольника 3b и 4b. Мы смотрим на прямоугольник, состоящих из площадей 1, 3a и 4b, и на прямоугольник, состоящий из площадей 2, 4a и 4b. Действительно ли верхняя и нижняя площади одинаковы по величине?

Если бы они были одинаковые по величине, диагональ целого прямоугольника представляла бы собой прямую одинакового уклона. Поскольку этого нет (существует «надлом» в общей точке двух прямоугольников 1 и 2), величина нижней площади превышает величину верхней площади (в данном вышеуказанном случае).

Так как четыре треугольника попарно одинаковы по величине, остаётся лишь одно решение: прямоугольник 1 по площади меньше, чем прямоугольник 2. Тем самым мы нашли решение нашей вышеуказанной проблемы: когда надо остановить линейку так, чтобы площадь 1 и 2 были по величине одинаковыми. Мы начнём сначала и снова оставим нижнюю длину второго прямоугольника открытой.



Однако на этот раз мы рисуем диагональ и получаем точку X. С помощью этой точки мы в состоянии определить правильную ширину второго прямоугольника. Тем самым мы располагаем способом превратить один прямоугольник в другой прямоугольник одинаковой площади.

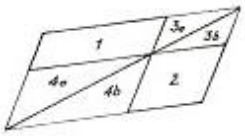
Длина второго прямоугольника может быть короче длины первого прямоугольника. Точка X, следовательно, расположена глубже. Если вместо длины известна ширина второго прямоугольника, то вышеуказанный способ применяется аналогично: точка Ч определяет искомую длину прямоугольника. (В вышеуказанном случае точка X определяла искомую ширину прямоугольника).

Длина второго прямоугольника может быть короче длины первого прямоугольника. Точка X, следовательно, расположена глубже. Если вместо длины известна ширина второго прямоугольника, то вышеуказанный способ применяется аналогично: точка X определяет искомую длину прямоугольника. (В вышеуказанном случае точка X определяла искомую ширину прямоугольника).

Относится ли вышеуказанное построение также к ромбам и похожим на ромб фигурам? Конечно! Почему? Существуют следующие соотношения:

$\Delta 3a = \Delta 3b$;

$\Delta 4a = \Delta 4b$;



следовательно, равнобедренный ромб 1 равен равнобедренному ромбу 2.

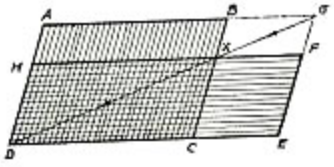
Тем самым мы располагаем возможностью превратить любой равнобедренный ромб в другой ромб одинаковой площади, если или длина одной стороны, или высота этого искомого ромба нам известны.

Обобщение: Если рисовать параллели к сторонам параллелограмма через одну точку, распложенную на диагонали, то параллелограммы, диагонали которых не пересекаются, будут иметь одинаковую площадь. (Теорема Гномона).

Гномон – это не фамилия древнегреческого математика. В древности гномоном называли какую-то палочку, с помощью которой священники узнавали правильный момент сева.

Построение, которое мы описали, является следующим:

Данная фигура: # ABCD.



Искомая фигура: #, площадь которой одинакова (одна сторона DE)

Целая площадь # ADEG дополняется.

Благодаря диагонали, мы получаем точку X. Таким образом, мы определяем вторую сторону EF.

Факт, что оба параллелограмма одинаковой площади, следует из теоремы Гномона: оба параллелограмма располагаются на площади HXCD, кроме того, существуют следующие соотношения:

#ABXH = #XFEC, следовательно

#ABCD = #HFED.

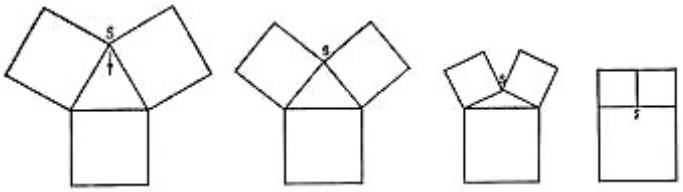
Только одно превращение оказывается неосуществимым: превращение прямоугольника в квадрат. Это нам не удастся с помощью теоремы Гномона. Нам была известна или длина, или ширина искомого прямоугольника, и мы

нашли искомую величину с помощью построения Гномона. Но, если превратить прямоугольник в квадрат, ни его длина, ни его ширина нам не известны, так как они по величине одинаковы и представляют собой искомую сторону. Эту задачу можно выполнить лишь с помощью теоремы о высотах, придуманной Евклидом.

Теорема Пифагора

Пифагор Самосский жил во второй половине VI века до нашей эры (около 570 – 500 гг. до н.э.). Он был основателем философской школы, которая целыми веками оказывала большое влияние на духовное развитие того времени. В рамках этой школы математика играла очень важную роль. Математиком считался тот человек, который посвящал свою силу решению проблем, связанных с борьбой за существование. Цифрам сопоставляли определённые качества. Цифры представляли собой элементы жизни вообще. Говорили о «мужских» и «женских», о недостаточных, совершенных, лишних и дружественных цифрах. Им также соответствовали звук, земля и огонь, справедливость и разум. Сторонники Пифагора отнесли 10 небесных тел к своей цифровой системе.

Теорема Пифагора занимает центральное место в области геометрии. Если прибегать с самого начала к известной всем фигуре, мы предвосхитили как бы часть изучаемых нами проблем. Целесообразным является следующий подход: если ученик перемещает и сравнивает фигуры, у него начинается процесс мышления, и только потом, как будто в динамичном процессе мышления, мы приходим к особенностям прямоугольного треугольника. Если мы, например, строим квадраты на трёх сторонах равностороннего треугольника и следим за постепенным приближением вершины треугольника к его основанию, мы заставляем ученика думать. Верхние квадраты становятся всё меньше и меньше, нижний квадрат остаётся постоянным. Потом мы сравниваем общую площадь верхних квадратов с площадью нижнего квадрата:



Верхние квадраты в два раза больше, чем нижний квадрат.

Верхние квадраты становятся меньше в то время, как нижний квадрат остаётся таким же.

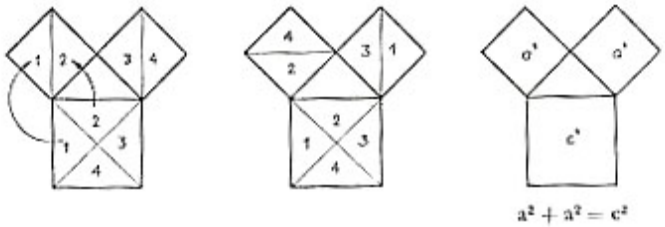
Площадь верхних квадратов составляет половину нижнего квадрата.

При вышеуказанных преобразованиях площадь обоих верхних квадратов уменьшается от удвоенной площади нижнего квадрата до его половины. Значит, где-то в ходе процесса перемещения площадь обоих верхних квадратов равна площади нижнего квадрата. Задача ученика заключается в том, что он путём испытаний, мышления, вычисления и т.д. находит эти квадраты. Его предположение является следующим: площадь обоих верхних квадратов равна площади нижнего квадрата, если треугольник – прямоугольный.

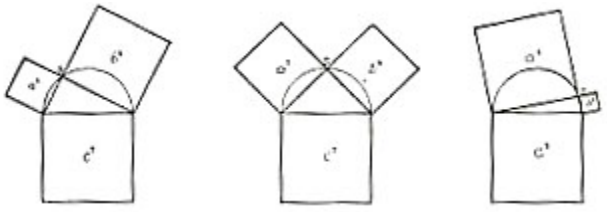
Первое подтверждение этого предположения мы получаем при специальном случае равнобедренного прямоугольного треугольника:

Диагонали разделяют нижний квадрат на четыре равнобедренных прямоугольных квадрата.

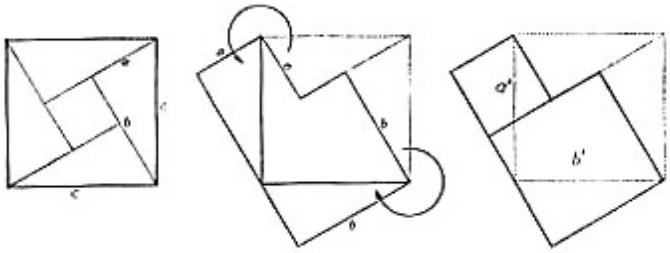
Передвигая и поворачивая эти треугольники, мы получаем верхние квадраты:



Относится ли это только к равнобедренному прямоугольному треугольнику? Мы опять передвигаем вершину треугольника, на этот раз вдоль полукруга над основанием треугольника (окружность Фалеса) направо и налево. В ходе этого процесса один квадрат увеличивается за счёт другого. В тот момент, когда Верина достигает крайней точки основания, маленький квадрат будет «проглочен» большим квадратом, и площадь большого квадрата будет равна площади нижнего квадрата. Напрашивается предположение, что площадь обоих верхних квадратов, построенных на обоих катетах квадрата, всегда равна площади нижнего квадрата, построенного на гипотенузе.



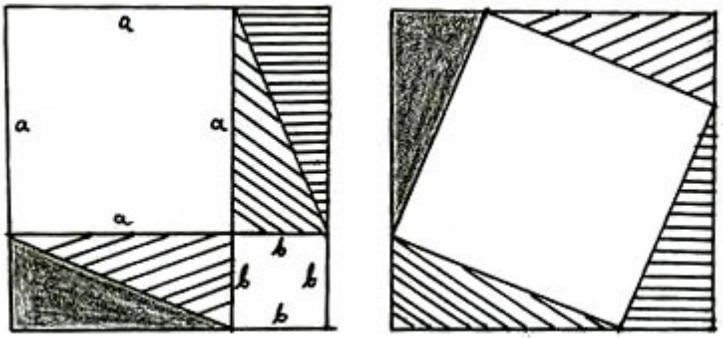
Есть целый ряд подходов к доказательству правильности вышеупомянутого предположения. Так называемое «индийское доказательство» обращается к ученику только одним словом в связи с нижеуказанным рисунком: «Смотри!» Задача ученика заключается в том, что он – поворачивая два треугольника – находит путь от квадрата, построенного на гипотенузе, до квадратов, построенных на катетах.



Источник: Энциклопедический словарь юного математика.

Москва: «Педагогика», 1989.

Для доказательства общего случая в древней Индии применяли два способа: в квадрате со стороной a + b изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин a и b (смотрите на нижеуказанных рисунках), после чего писали одно слово: «Смотри!» И, действительно, взглянув на эти рисунки, мы видим, что слева свободна от треугольников фигура, состоящая из дух квадратов со сторонами a и b, соответственно, её площадь равна $a^2 + b^2$, а справа – квадрат со стороной c – его площадь равна c^2. Значит, $a^2 + b^2 = c^2$, что и составляет утверждение теоремы Пифагора.



Следующий рисунок показывает, насколько легко – как будто в форме игры – мы в состоянии достичь познания Пифагоровой теории. Пусть ученики размещают четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b внутри квадрата длины a + b. Из многообразных вариантов, пять из которых указаны в нижеуказанном рисунке, мы выбираем второй и пятый варианты:

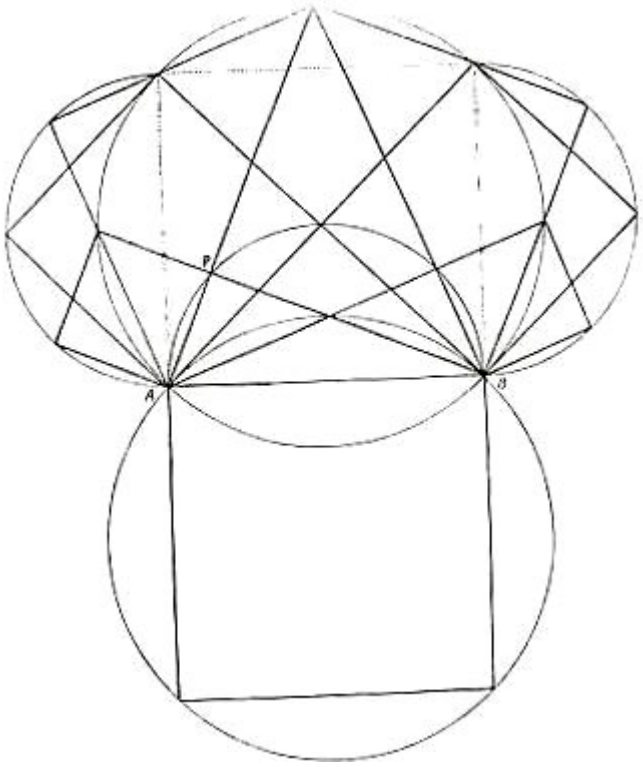
Поскольку и обрамляющие квадраты, и четыре треугольника одинаковы по площади, незакрашенные площади тоже конгруэнтны. Из этого следует:

$a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство Пифагоровой теоремы влечёт за собой многочисленные построения и применения: сложение и вычитание квадратов, превращение прямоугольника в квадрат (теорема о высотах, теорема катетов), извлечения квадратных корней и т.д.

Как заключение, мы прибегаем к изображению, которое представляет собой резюме всех вышеуказанных приобретённых познаний: окружность Фалеса, теорема Пифагора и т.д.

P двигается по окружности, построенной на гипотенузе AB и в одно и то же время двигаются вершины квадратов, построенных на катетах, по полуокружностям сторон или вдоль описанной окружности квадрата, построенного на гипотенузе. Мы «подняли» эту окружность. Исходя из вышеуказанной фигуры, мы в состоянии подтвердить многие закономерности, в первую очередь теоремы об углах, вписанных в окружность.

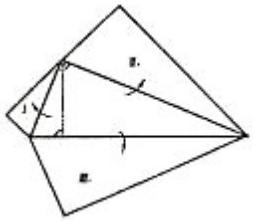


Важное обобщение

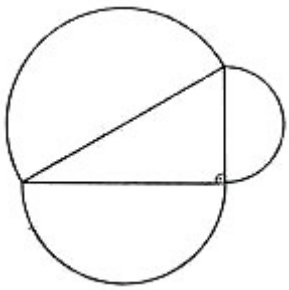
Если построить высоту прямоугольного треугольника, мы получаем три треугольника (ΔI, ΔII, ΔIII, то есть целый треугольник, состоящих из ΔI и ΔII.) Соответствующие углы одинаковы: α = α’ и т.д. Все три треугольника подобны. И существует следующее взаимоотношение:

ΔI + ΔII = ΔIII.

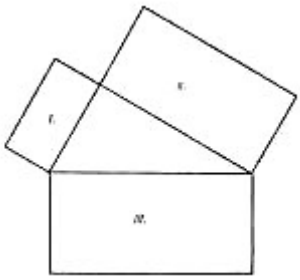
Если повернуть все три треугольника наружу вокруг соответствующей гипотенузы каждого треугольника, сохраняется вышеупомянутое соотношение ΔI + ΔII = ΔIII.



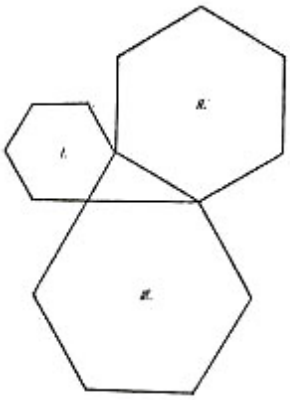
Можно показать, что это свойство прямоугольного треугольника относится не только к подобным треугольникам, но и к подобным геометрическим фигурам. Так, теорема Пифагора представляет собой лишь особый случай общей закономерности: сумма площадей обеих фигур, построенных на катетах, равна площади фигуры, построенной на гипотенузе. Это относится и к криволинейным фигурам.

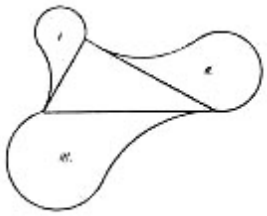


полукруги



прямоугольники, стороны которых относятся как 2:1 (прямоугольники, длины которых в два раза превышают ширину.





Вернёмся ещё раз к полукругу. сходство трёх полукругов очевидно. Исходя из этого наблюдения, мы получаем следующее уравнение:

◠I + ◠II = ◠III.

Если поворачивать III на 180^{O} вокруг гипотенузы, так что полукруг III становится окружностью Фалеса прямоугольного треугольника, мы получаем

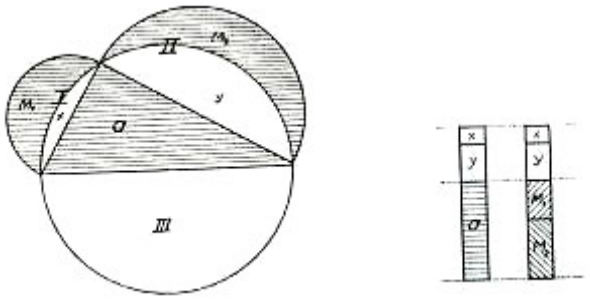
новые площади: «луночки» M_1 и M_2, и площади x и y. Дальнейшие отношения ученикам не очевидны. Они становятся более очевидными, если мы ученикам объясняем следующие отношения:

$\text{III} = \text{I} + \text{II}$

$\text{III} = M_1 + x + M_2 + y$

$\text{III} = \Delta a + x + y$

Если ученики по-прежнему не понимает вышеуказанное соотношение, то мы превращаем площади в колонки, как показано на рисунке внизу:

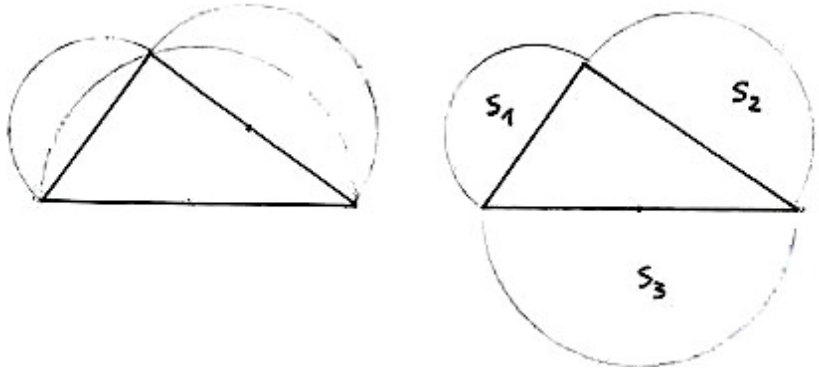


Источник: Энциклопедический словарь юного математика.

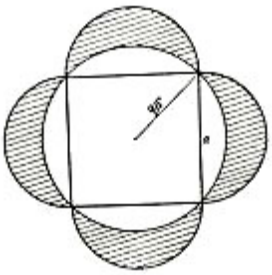
Москва: «Педагогика», 1989.

Гиппократовы луны – фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, и притом такие, что по радиусам и длине общей хорды этих окружностей с помощью циркуля и линейки можно построить равновеликие им квадраты.

Из обобщения теоремы Пифагора на полукруги следует, что сумма площадей луночек, построенных на катетах, которые изображены на рисунке слева, равна площади треугольника. Поэтому, если взять равнобедренный прямоугольный треугольник, то получатся две луночки, площадь каждой из которых будет равна половине площади треугольника. Пытаясь решить задачу о квадратуре круга, древнегреческий математик Гиппократ (V в. до н.э.) нашёл ещё несколько луночек, площади которых выражены через площади прямолинейных фигур.



Этот результат скрывает в себе что-то странное и даже непостижимое: как получается, что кривые площади равны по величине фигуре, которая ограничивается тремя прямыми линиями? Круг ведь никогда не превращается в квадрат! И всё-таки: сумма площадей луночек равна площади треугольника. То же самое относится к квадрату: сумма площадей четырёх луночек равна площади квадрата.



4 полукруга, построенных на стороне

= 2 круга, построенных на стороне

= круг, который по величине с площадью двух полукругов, построенных на сторонах

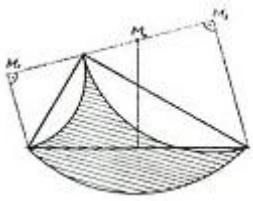
= круг с радиусом $a/2\sqrt{2}$

= окружность, описанная вокруг квадрата.

Если мы отберём четыре «белые» плоскости, остаётся следующее отношение:

четыре луночки = квадрат.

Три заштрихованные площади равны площади треугольника.



Заштрихованная площадь равна площади треугольника.

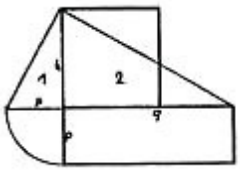
Это уже было известно во время античности. Архимед придумал фигуры, похожие на вышеуказанные.

Кроме того факта, что теорема Пифагора распространяется на все подобные фигуры, построенные на сторонах прямоугольного треугольника, нам открываются новые возможности.

Два простых доказательства передвижения, относящиеся к теореме о высоте и теореме Евклида о катетах.

Теорема о высоте: $h^2 = pq$.

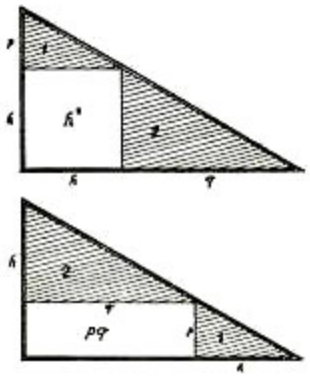
Мы делаем два треугольника из картона или дерева:



I: прямоугольный треугольник с катетами p и h.

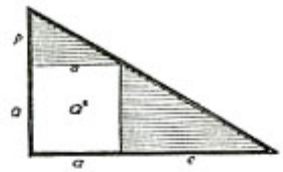
II: прямоугольный треугольник с катетами h и q.

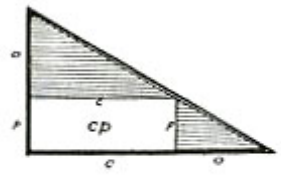
Расположим оба треугольника так, чтобы они образовывали третий треугольник, который служит как будто рамкой. Этот третий треугольник тоже прямоугольный, и его катеты – h + p и h + q. Сначала меньший треугольник находится наверху, больший треугольник – внизу справа. Незаштрихованная площадь h^2 остаётся свободной. Если передвигать треугольник II наверх, незаштрихованная площадь pq остаётся свободной. Обе незаштрихованные площади по величине одинаковы. Теорема о высоте доказана: $h^2 = pq$.

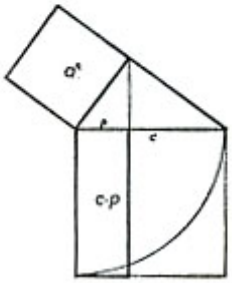


Теорема о катетах: a2 = cp

Оба треугольника обладают катетами a и p (треугольник I) и a и c (треугольник II). Рамка: a + c, a + p. Передвигая оба треугольника внутри одной и той же рамки, мы получаем две фигуры неодинаковой формы, но одинаковой площади. В первом случае мы получаем квадрат, построенный на катете a, во втором случае мы получаем прямоугольник, длина которого равна гипотенузе c, и ширина которого равна отрезку гипотенузы p:







a2 = cp.

Теорема о катетах доказана.

Список литературы

Rudolf Steiner: Padagogische Schriften

Hermann von Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen
Darstellende Geometrie
Novalis Verlag, Freiburg
Perspektive
Troxler Verlag, Bern

Ernst Bindel: Pythagoras
Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart
Harmonien im Reiche der Geometrie
Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart

Martin Wagenschein: Ursprundliches Verstehen und exaktes Denken
E. Klett-Verlag, Stuttgart

Alexander Strakosch: Geometrie durch ubende Anschauung
J. Ch. Mellinger-Verlag, Stuttgart

Alexander Wittenberg: Bilding und Mathematik
E. Klett-Verlag, Stuttgart

Рудольф Штейнер: Педагогические доклады

Герман фон Баравалле: Геометрия как язык форм.
Изобразительная геометрия.
Фрейбург, издательство Новалис
Берн: издательство Трокслер

Эрнст Биндел: Пифагор
Гармонии в области геометрии
Издательство: Фрейес Гейстенлебен, Штутгарт

Мартин Вагенштейн: Первоначальное понимание и точное мышление
Издательство: Эрнст Клетт, Штутгарт

Александр Стракош: Геометрия путём наглядных примеров.
Издательство: Эрнст Клетт, Штутгарт

Александр Виттенберг: Образование и математика.
Издательство: Эрнст Клетт, Штутгарт

Домашние задания для особо одарённых детей

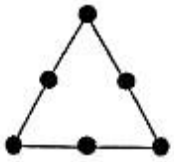
Молодёжь любит развлечения и приключения. Довольно часто бывает так, что инциденты развлекательного характера образуют детей на занятиях, и тем самым проявляют их интерес к данному предмету, не так ли?

Загадки и задачи, над которыми надо задумываться, оживляют будничную жизнь ученика. Они требуют от ученика не меньше, чем обычные занятия, даже наоборот. Они требуют от ученика внутреннего стимула, они от него требуют следующее: ему приходится справляться с нестандартными головоломками. Не в последнюю очередь по этой причине решение таких упражнений для развития логического мышления может повлечь за собой большое внутреннее удовлетворение для ученика.

Группа задач I: задания разного типа.

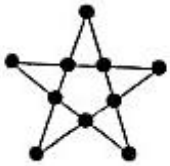
Задача 1. Положите шесть монет так, чтобы они находились в трёх рядах по три монеты.

Решение:



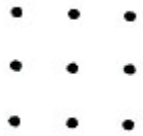
Задача 2. Десять монет находятся в пяти разных рядах так, что в каждом отдельном ряду лежат четыре монеты.

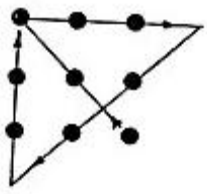
Решение:



Задача 3. Соедините четырьмя прямыми линиями все девять точек нижеуказанной фигурки, не отрывая руки от листа.

Решение:





Задача 4. Сколько кубиков вам нужно, чтобы создать квадратную площадь, при которой 117 площадей кубиков видны?

Решение: 81 кубик. Квадратную площадь образуют 9 х 9 кубиков. Наверху видна 81 площадь, на четырёх сторонах видно по 9 площадей, то есть всего 36 площадей.

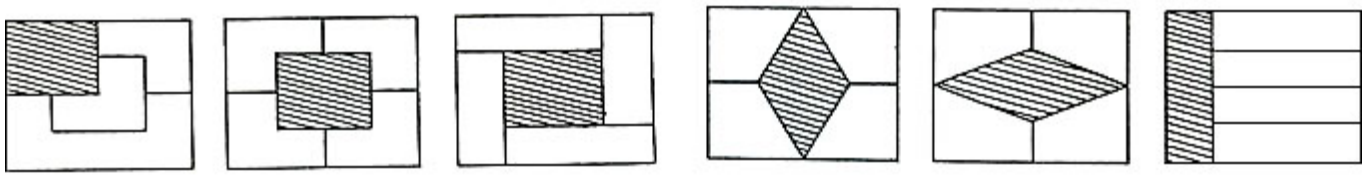
81 площадь
+ 36 площадей
_____
117 площадей

Задача 5. Если бы было возможно распилить кубик объёмом 1 кубический метр на маленькие кубики в один кубический миллиметр, какова была бы суммарная площадь сторон этих маленьких кубиков?

Решение: 1 миллиард $мм^3$ (1000 х 1000 х 1000) составляет площадь 6 миллиардов $мм^2$, то есть 6000 $м^2$. Это в 1000 раз больше, чем площадь сторон нераспиленного кубика.

Задача 6. Крестьянин владеет прямоугольным полем. Поскольку четверть площади этого поля вполне достаточна и полностью покрывает его личную потребность, он решил распределить остальные три четверти между своими четырьмя сыновьями. При этом распределении земли надо учитывать, что нельзя пренебречь интересами одного ради выгоды другого, то есть каждый из сыновей должен получить кусок земли одинаковой величины и, по возможности, одинаковой формы. Попытайтесь разделить поле. (Часть поля, принадлежащая крестьянину, заштрихована.

Решения:



Группа задач II: задания со спичками

Задача 7. Переместив четыре спички, Вы получите, исходя из нижеуказанной фигурки, три квадрата одинаковой величины.

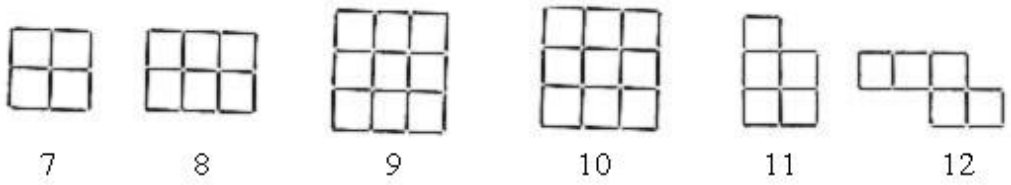
Задача 8. Убрав пять спичек, Вы преобразуете нижеуказанную фигурку в три квадрата одинаковой величины.

Задача 9. Исходя из нижеуказанной фигурки, Вы получите два квадрата, убрав 8 спичек.

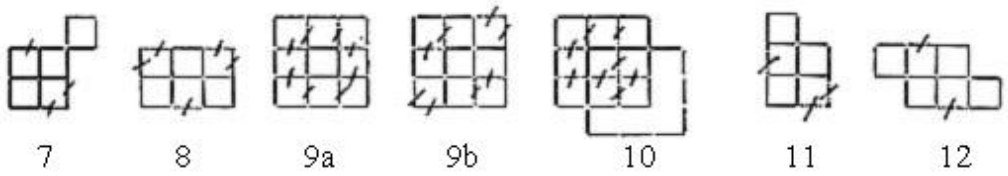
Задача 10. Переместив восемь спичек, Вы получите два квадрата одинаковой величины.

Задача 11. Убрав три спички, Вы получите три квадрата.

Задача 12. Переместив две спички, Вы получите два квадрата.



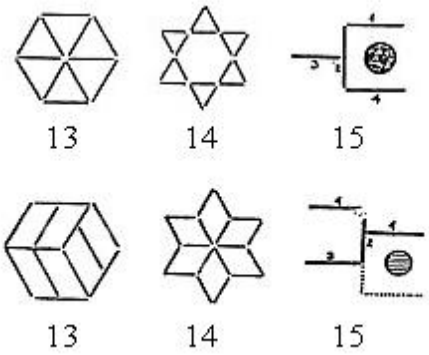
Решения:



Задача 13. Шесть равносторонних согласованных треугольников должны быть преобразованы в шесть согласованных параллелограммов при перемещении лишь трех спичек.

Задача 14. Шестиугольная звезда (государственный символ в израильском флаге) должна быть преобразована в шесть согласованных равносторонних параллелограммов при перемещении лишь шести спичек.

Задача 15. Как переместить в нижеуказанной фигурке (лопата) лишь две спички так, чтобы форма фигурки сохранилась, но монета не лежала на лопате?

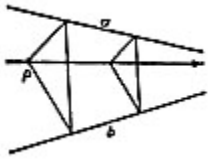


Группа задач III: разные построения

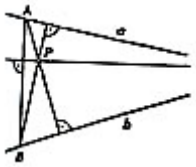
Задача 16. Нарисуйте прямую через точку P так, чтобы эта прямая пересекала две другие прямые в неприступной точке.

Решения:

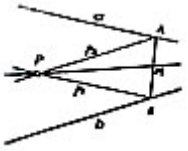
1. Похожие по форме треугольники (вытягивание)



2. Опустите перпендикуляры через точку P к прямой a и к прямой b. Вы получите точки пересечения A и B. Опустите перпендикуляр из точки P на отрезок AB. (Три высоты треугольника)



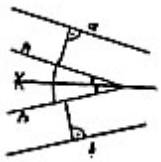
3. Нарисуйте параллельные прямым a и b линии p_1 и p_2. Вы получите точки пересечения A и B. Разделите AB пополам: Вы получите M. (Диагонали в параллелограмме).



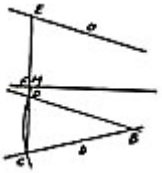
Задача 17. Даны две прямые, точка пересечения которых неприступна. Нарисуйте биссектрису угла.

Решения:

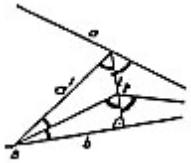
1. Нарисуйте параллельные прямым a и b линии p_1 и p_2 на одном и том же расстоянии. Вы получите биссектрису угла, образованного прямыми a и b.



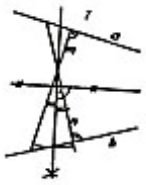
2. Параллельная прямой a прямая пересекает прямую b в точке B. Постройте дугу CD из точки B. Если продлить отрезок CD, то Вы получите точку E. Опустите перпендикуляр к точке M, которая, в свою очередь, расположена прямо в центре отрезка CE.



3. Опустите перпендикуляр l к прямой b как симметрической оси. Разделите угол между a’ и b пополам. Вы получите P. Отразите отрезок BP на симметрической оси.



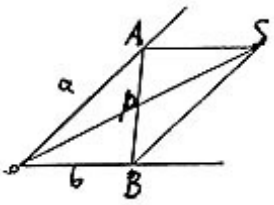
4. Опустите перпендикуляры m и n к прямым a и b. Постройте биссектрису в точке пересечения двух перпендикуляров m и n. Затем постройте перпендикуляр прямо в середине между прямыми a и b.



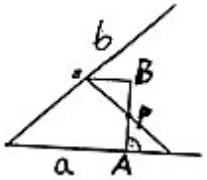
Задача 18. Внутри угла нарисуйте прямую, проходящую через некую точку так, чтобы эта точка разделила пополам отрезок между двумя бёдрами.

Решения:

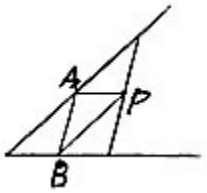
1. PS равняется OP. Нарисуйте параллельные бёдрам линии через точку S. Вы получите точки пересечения с прямыми a и b – A и B. (диагонали параллелограмма делят друг друга пополам).



2. PA представляет собой перпендикуляр к одному из бёдер. AP равен отрезку PB. Нарисуйте параллельные прямым линиям линии через точки B и S. (Согласованные треугольники).



3. Нарисуйте параллельные бёдрам прямые через точку P. Вы получите A, B. Нарисуйте параллельную отрезку AB прямую через точку P. (Средние линии).

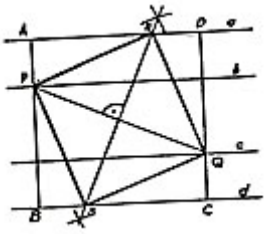


Задача 19. Нарисуйте четыре параллельные линии, которые попарно находятся на одном расстоянии друг от друга. Нарисуйте квадрат, углы которого расположены на параллельных линиях.

Решение: квадрат ABCD на прямых линиях a и d. Перпендикуляр к отрезку PQ пересекает a в точке R и d в точке S.

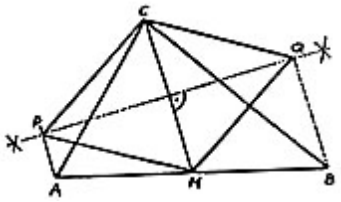
(AP = BS = CQ = DR)

Все четыре расстояния одинаковы по величине.



Задача 20. Нарисуйте треугольник произвольной формы. Постройте одинаковый по площади ромб так, чтобы линия тяжести треугольника стала диагональю ромба.

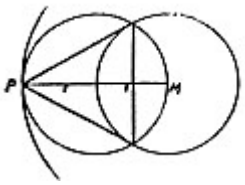
Решение: перпендикуляр прямо в середине расстояния CM (линии тяжести) пересекает параллельные расстоянию CM линии через точку A и через точку B в точках P и Q.



Группа задач IV: Круг, окружность, хорды, касательные.

Задача 21. Определите точку вне окружности так, что две касательные круга и хорда между касательными одинаковы по длине. Значит, две касательные и хорда представляют собой равносторонний треугольник.

Решение: Все точки P лежат на концентрической окружности к первой окружности с радиусом, равным двойной длине. Касательные и хорды между двумя касательными точками образуют равносторонний треугольник.



Задача 22. Внутри окружности (см. нижеуказанный рисунок) нарисованы четыре хорды, конечные точки которых находятся на недоступной части окружности. Разделите эти хорды пополам.

а) Центр окружности известен.

б) Центром пользоваться при построении нельзя.

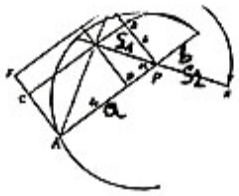
Решения:

а) Из центра опустите перпендикуляры к хордам.

б) Хорда S пересекается любой хордой в точке P. По теореме о хордах существует следующее соотношение:

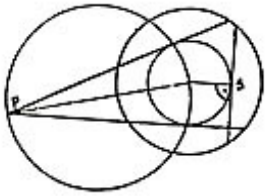
$ab = s_1s_2$

$=> = ab/s_1$ (Решение по теореме Гномона)



Задача 23. Нарисуйте, исходя из точки, расположенной вне окружности, секущие, из которых круг вырезает хорды данной длины s.

Решение: Искомые секущие являются касательными к окружности, которая касается данной хорды s. Искомые секущие исходят из точки P.

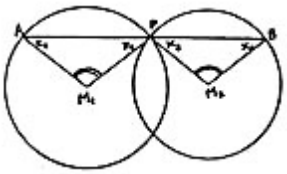


Задача 24. Нарисуйте секущую через одну из двух точек пересечения двух кругов неодинакового радиуса так, чтобы центральные угла, опирающиеся на возникающие хорды, были одинаковой длины.

Решение: Центральные углы равны тогда, когда равны следующие четыре угла:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

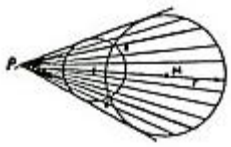
Это значит, что расстояние M_1A параллельно расстоянию M_1P и расстоянию M_2B параллельно расстоянию M_1P.



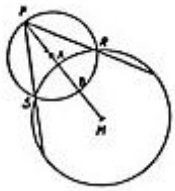
Задача 25. Исходя из одной точки вне окружности, нарисуйте секущую так, что хорда и расстояние вне окружности будут одинаковой длины.

Решения:

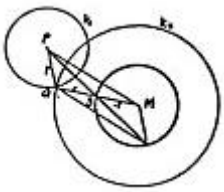
1. Середины всех секущих расположены на окружности, центр которой находится в середине отрезка PM и радиус которой составляет r/s. Точки пересечения двух кругов представляют собой точки R и S (вытягивание).



2. Разделите PM на три равные части. Вы получите точки A и B. Постройте круг вокруг A с радиусом AP = r. Этот круг вырезает из данного круга точки R и S (точки пересечения двух кругов).

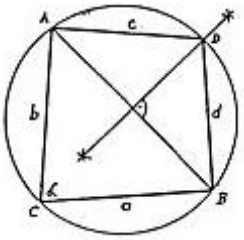


3. Постройте круг k_1 с радиусом r вокруг точки P и круг k_2 с радиусом 2r вокруг M. Вы получите точку пересечения этих двух кругов, то есть точку Q. на отрезке QM расположена точка S.



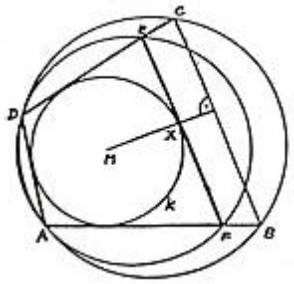
Задача 26. Постройте четырёхугольник, состоящий из хорд. Даны следующие параметры: a = 7 см, b = 8 см, угол между a и b = α. Сторона c и сторона d одинаковы по длине.

Решение: Отрезок AB между конечными точками сторон a и b представляет собой одну из двух диагоналей четырёхугольника. Опустите перпендикуляр прямо в середине этого расстояния. Постройте описанный вокруг четырёхугольника круг. Вы получите точку пересечения перпендикуляра и окружности, то есть точку D. Стороны c (=AD) и d (BD) одинаковы по длине.



Задача 27. Попытайтесь отрезать кусок от четырёхугольника, состоящего из хорд так, что четырёхугольник представляет собой одновременно и четырёхугольник, состоящий из хорд, и четырёхугольник, состоящий из касательных.

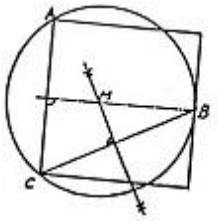
Решение: Произвольный четырёхугольник, состоящий из хорд: четырёхугольник ABCD. Вписанная в стороны CD, DA и AB окружность K, как показано на рисунке. Опустите, исходя из центра круга K, перпендикуляр к расстоянию BC. Точка пересечения перпендикуляра и круга – точка X. Через X нарисуйте касательную EF, которая идёт параллельно отрезку BC.



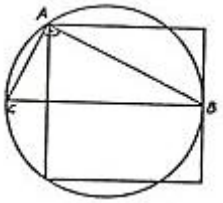
Задача 28. Нарисуйте квадрат и круг так, чтобы окружность шла через два смежных угла квадрата и касалась противоположной стороны.

Решения:

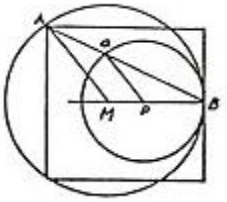
1. Окружность через три точки A, B и C. Описывающая треугольник ABC окружность.



2. Опустите перпендикуляр к расстоянию AB из точки A. Вы получите C. (Угол внутри полуокружности является прямоугольным).



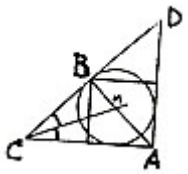
3. Путём вытягивания. Нарисуйте произвольный круг вокруг P так, чтобы он касался квадрата в точке B. Точка пересечения круга и отрезка AB – точка Q. Отрезок AM идёт параллельно отрезку PQ.



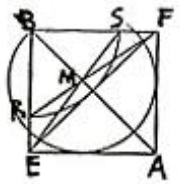
Задача 29. Нарисуйте квадрат и круг так, чтобы окружность проходила через один угол квадрата и касалась обеих противоположных сторон.

Решения:

1. Точка M расположена на диагоналях. Отрезок CD перпендикулярен отрезку AB. Круг представляет собой вписанную в треугольник ACD окружность.



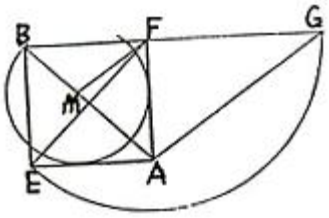
2. Нарисуйте вокруг B четверть окружности с радиусом r = FD/2 (половина диагонали AB). Вы получите расположенные на крае квадрата точки R и S. Точка пересечения двух отрезков представляет собой точку M. (Восьмиугольник из квадрата).



3. Точка M делит диагональ в отношении $\sqrt{2}/1$.

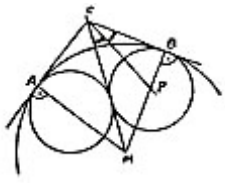
FG = EF = BF$\sqrt{2}$.

M и F идут параллельно друг другу. (Вытягивание).

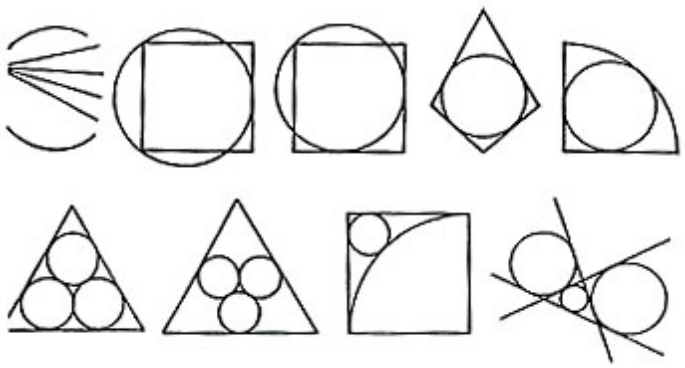


Задача 30. Нарисуйте два одинаковых круга, касающихся друг друга. Эти два круга должны касаться наружной дуги в двух данных точках.

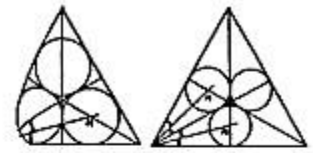
Решение: Постройте касательные дуги в точках A и B.Точка пересечения этих двух касательных представляет собой точку C. Разделите угол BCM пополам, и Вы получите P. Аналогичное построение – с другой стороны отрезка CM.



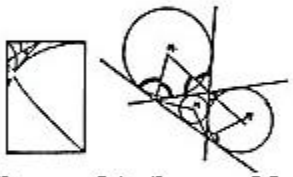
Задачи 31 – 35. Поищите касательные круги нижеуказанным фигуркам (дельтоид, четверть круга с квадратом, три пересекающие друг друга прямые). Сначала нарисуйте фигурку, и только потом – круг.



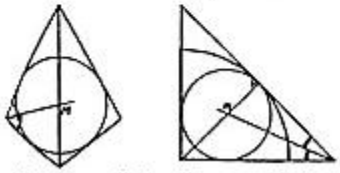
Решение: В каждом вышеуказанном случае надо построить биссектрисы угла.



Задача 33а Задача 33б



Задача 34 Задача 35



Задача 31 Задача 32

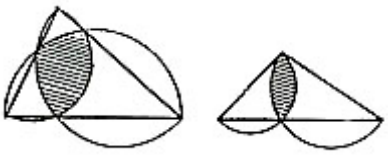
Группа задач V: Фалес, Пифагор

Задача 36.

а) С каких точек, расположенных внутри остроугольного треугольника, Вам кажется, что все стороны треугольника под тупым углом?

б) Та же самая задача, но на этот раз треугольник тупоугольный.

Решение:



Остроугольный треугольник. Тупоугольный треугольник.

Задача 37. Определите точки, расположенные внутри нерегулярного четырёхугольника так, что Вам кажется следующее: по две стороны треугольника перпендикулярны друг другу.

Решение: В случае смежных друг с другом сторон мы получим одно решение (рис. 1), в случае противоположных сторон мы получим два решения (рис. 2).

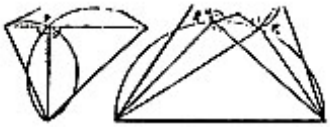


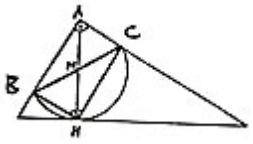
рис. 1 рис. 2

Задача 38. нарисуйте полуокружность внутри прямоугольного треугольника так, чтобы эта полуокружность касалась перпендикуляра высоты, расположенной на гипотенузе треугольника.

Решение: Разделите отрезок АН пополам. Вы получите точку М.

Или: нарисуйте параллели к катетам, которые идут через точку Н.

ВС представляет собой одну диагональ прямоугольника АВНС, АН представляет собой другую диагональ этого прямоугольника.

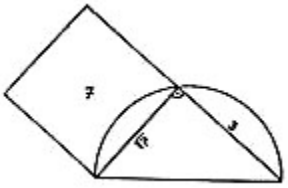


Задача 39. Извлеките корень из числа геометрическим путём, например, из 7. Исходите из суммы или разности двух чисел, представляющих собой квадратные корни, например, 7 = 16 – 9.

Решение: По теореме Пифагора

16 – 9 = 7.

Одна сторона квадрата равняется $\sqrt{7}$.

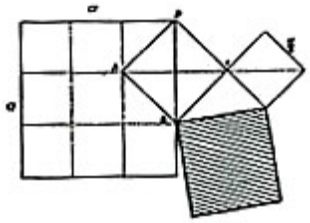


Задача 40. Разделите квадрат на девять частей, деля каждую сторону на три части. Присоедините один из этих квадратов к квадрату ABCD (к фигурке 40). Какой величины будет заштрихованная площадь?

Решение:

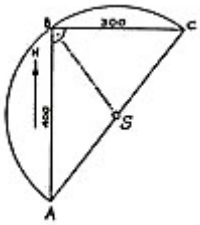
Заштрихованная площадь:

$2a^2/9 + a^2/9 = 3a^2/9 = a^2/3$

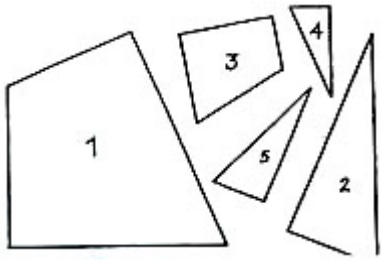


Задача 41. Дочь командира корабля найдёт среди старых бумаг, которые уже пожелтели, документ и схему со следующими замысловатыми данными: чтобы найти клад монет, Вам надо идти от большой скалы к северу 400 шагов. Там будет вторая скала. Оттуда надо идти 300 шагов к востоку до третьей скалы. Затем поищите место, которое находится на равном расстоянии от всех трёх скал. Там закопан клад.

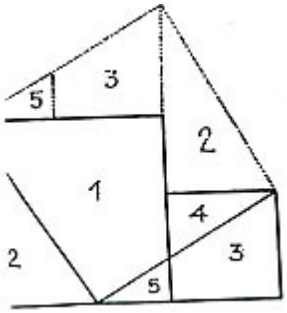
Решение: Клад находится прямо в середине расстояния АС. (Пифагор, Фалес, описанная окружность).



Задача 42. Нарисуйте один к одному нижеуказанные площади и отрежьте их так, чтобы получился шаблон. Из этих шаблонов Вы можете создать два квадрата, или даже один большой.



Решение:



Доказательство теоремы Пифагора «Стул невесты».

Группа задач VI: Задания вычислительного характера.

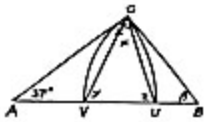
Задача 43. Вычислите сумму всех внешних углов нерегулярного пятиугольника.

Решение. Внутренний пятиугольник с углами a, b, c, d, e имеет сумму углов 540^O. Для пяти треугольников существуют соотношения между углами:

$a + \beta + \delta = 180^O$
$b + \gamma + \varepsilon = 180^O$
$c + \delta + \alpha = 180^O$
$d + \varepsilon + \beta = 180^O$
$e + \alpha + \gamma = 180^O$
_____
$a + b + c + d + e + 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 900^O$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^O$

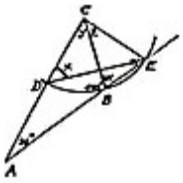
Задача 44. В прямоугольном треугольнике ABC расстояние AB является гипотенузой. Угол у точки A составляет 37^O. Вокруг точек A и B мы нарисуем по одной дуге через точку C. Точки пересечения этих дуг и гипотенузы представляют собой точки U и V. Вычислите углы треугольника UVC.

Решение: Треугольники AUC и BUC равнобедренные.
$\beta = 53^O$.



$2 \sphericalangle z = 37^O - 37^O = 143^O$;
$z = 71^O\ 30'$
$2 \sphericalangle y = 180^O - 53^O = 127^O$;
$y = 63^O\ 30'$
$\sphericalangle x = 180^O – (71^O\ 30' + 63^O\ 30') = 45^O$.

Задача 45. В треугольнике ABC угол у точки A составляет 24^O, а угол у точки B составляет 110^O. Постройте окружность вокруг C так, чтобы B находилась на окружности. Эта окружность пересекает отрезок AC в точке D. Удлините отрезки AB в точке E. Вычислите угол между DC и DE.



Решение:

$\sphericalangle y = 180^O - (24^O + 110^O) = 46^O$;

$\sphericalangle w = 70^O$;

$\sphericalangle z = 180^O - 2 \times 70^O = 40^O$;

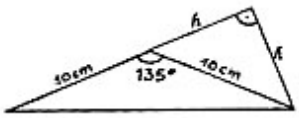
$\sphericalangle y + \sphericalangle z = 86^O$;

$2\sphericalangle x = 180^O - 86^O = 94^O$;

$\sphericalangle x = 47^O$.

Задача 46. Бёдра равнобедренного треугольника составляют 10 см, угол между двумя бёдрами составляет 135^O. Вычислите площадь треугольника.

Решение:

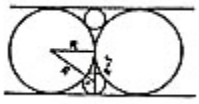


$gh/2 = 10h/2 = 5h$

$2h^2 = 100, h^2 = 50, h = \sqrt{50}$

$f = 5\sqrt{50} = 5 \times 5 \times \sqrt{2} = 25\sqrt{2}$.

Задача 47. Между двумя параллельными прямыми нарисованы две окружности, касающиеся одновременно и обеих прямых, и друг друга. Постройте два маленьких круга, которые касаются обоих больших кругов и одной из двух прямых. Перед построением маленьких кругов надо вычислить их радиус.



Решение. В прямоугольном треугольнике верно следующее:

$(R + r)^2 = R^2 + (R - r^2)$

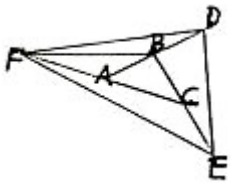
$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 + R^2 - 2Rr + r^2$

$4Rr = R^2$

$r = R/4$.

Группа задач VII. Задания развлекательного характера.

Задача 48. Дано: треугольник ABC со сторонами AB, BC и CA. Каждая из этих трёх сторон удлинена на AB, BC или CA так, что получаются точки F, D и E. Соедините точки F, D и E. Площадь треугольника DEF в семь раз больше, чем площадь данного треугольника ABC. Докажите это утверждение.



Решение: Треугольник FAB равен треугольнику ABC (основания одинаковы, высоты одинаковы). Треугольник FAB равен треугольнику FBD. Треугольник FAD равен удвоенной площади треугольника ABC.

Все остальные «присоединённые» треугольники в два раза больше по площади, чем данный треугольник. Следовательно, треугольник DEF в семь раз больше по площади, чем треугольник ABC.

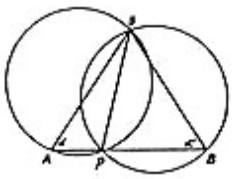
Задача 49. Нарисуйте равнобедренный треугольник. Выберите произвольную точку P, расположенную на основании. Соедините P с вершиной треугольника. Постройте описывающие эти два новых треугольника окружности. Докажите, что эти две описанные окружности одинаковы по площади.

Решение: α представляет собой вписанный угол, опирающийся на хорду PS в описанной окружности PAS.

α’ является вписанным углом, опирающимся на такую же хорду PS в описанной окружности PBS.

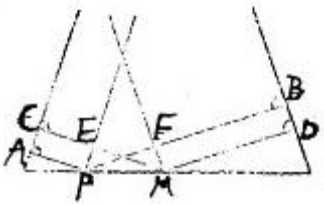
α = α’

Из этого следует, что обе описанные окружности одинаковой величины.



Задача 50. В равнобедренном треугольнике для произвольной точки, расположенной на основании, сумма разностей бёдер одинакова. Докажите это утверждение.

Решение:



Исходя из P и M, мы опустим перпендикуляры к бёдрам и нарисуем параллели к бёдрам.

PA = CM – TV

HD = MD + PF

PA + PB = CM – EM + MD = PF

MC = MD, EM = PF (симметрия).

PA + PB = 2MC = Const.